Le plus grand facteur premier de la fonction de Landau

Marc Deleglise, Jean-Louis Nicolas

Le plus grand facteur premier de la fonction de Landau

M. Deléglise, J.-L. Nicolas

14 septembre 2010

Abstract

After Landau, let us define $g(n)$ as the maximal order of a permutation of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ on n letters. We give several estimates of the largest prime divisor $P^+(g(n))$ of $g(n)$.

Key words : maximal order, symmetric group, distribution of primes, Landau's function.

2000 Mathematics subject classification : 11A25, 11N37, 11N05.

1 Introduction

Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur n lettres chacune des $n!$ permutations a un ordre. Dans [9], Landau a considéré

$$g(n) = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\text{ordre de } \sigma)$$

et démontré que

$$g(n) = \max_{\ell(M) \leq n} M \tag{1.1}$$

où ℓ est la fonction additive (c'est à dire vérifiant $\ell(MN) = \ell(M) + \ell(N)$ lorsque M et N sont premiers entre eux) définie par

$$\ell(p^\alpha) = p^\alpha, \quad p \text{ premier}, \ \ \alpha \geq 1. \tag{1.2}$$

On notera que $\ell(p^0) = 0 \neq p^0 = 1$, et que

$$\ell(g(n)) \leq n. \tag{1.3}$$

La formule (1.1) entraîne

$$M > g(n) \implies \ell(M) > n \tag{1.4}$$

ce qui montre que les valeurs de $g(n)$ sont les nombres en lesquels la fonction ℓ est « petite ». On a donc un problème d'optimisation pour la fonction arithmétique additive ℓ qui rejoint les problèmes de grandes valeurs de certaines fonctions multiplicatives étudiées par Ramanujan (cf. [23, 22, 20]).

Les méthodes utilisées par Ramanujan dans [23] pour étudier les « highly composite numbers » ont été employées dans ([16, 18]) pour obtenir des propriétés de la décomposition en facteurs premiers de $g(n)$. Dans [19] il est démontré que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = 1.$$

Dans l'article [9] (cf. aussi [14]) Landau démontre l'équivalence

$$\log g(n) \sim \sqrt{n\log n}, \qquad n \to +\infty. \tag{1.5}$$

Cette évaluation de $\log g(n)$ a été améliorée dans ([27, 28, 11, 12, 13]) à la fois sous forme asymptotique et sous forme effective. Voir les formules figurant ci–dessous au paragraphe 1.2.

Il existe un algorithme simple permettant de calculer la table des valeurs de $g(n)$ pour $1 \le n \le n_0$ (cf. [17, 3]).

Dans [3], un algorithme beaucoup plus sophistiqué permet de calculer la décomposition en facteurs premiers de $g(n)$ pour n quelconque inférieur à 10^{15}.

Soit $P^+(M)$ le plus grand facteur premier du nombre entier positif M. Il est montré dans ([16, 18]) que

$$P^+(g(n)) \sim \log g(n) \sim \sqrt{n\log n}, \qquad n \to +\infty \tag{1.6}$$

et dans [13]

$$P^+(g(n)) = \sqrt{n\log n}\left(1 + \frac{\log_2 n + O(1)}{2\log n}\right), \qquad n \to +\infty \tag{1.7}$$

ainsi que la borne effective

$$P^+(g(n)) \le 2.86\sqrt{n\log n}, \quad n \ge 2. \tag{1.8}$$

Cette dernière majoration a été améliorée par Grantham (cf. [7]) :

$$P^+(g(n)) \le 1.328\sqrt{n\log n}, \quad n \ge 5. \tag{1.9}$$

L'objet de cet article est de donner des estimations plus précises de $P^+(g(n))$.

Nous minorerons $P^+(g(n))$ au paragraphe 9 ; cette minoration est basée sur la remarque suivante (cf. lemme 9.1) : soit q le nombre premier suivant $P^+(g(n))$ (donc q ne divise pas $g(n)$) et soit λ un nombre premier tel que

λ^α divise $g(n)$ mais pas $\lambda^{\alpha+1}$, alors $\lambda^\alpha \leq 2q$. Ainsi la contribution des petits facteurs premiers dans $g(n)$ est faible, et l'équivalence (1.5) impose que $P^+(g(n))$ ne soit pas trop petit.

La majoration, qui sera traitée au paragraphe 5, est plus délicate. Il faut en effet montrer que le nombre de facteurs premiers inférieurs à $P = P^+(g(n))$ ne divisant pas $g(n)$ n'est pas trop grand. Pour cela nous utiliserons la méthode de Grantham [7]. On remarque (cf. lemme 3.2) qu'au plus un nombre premier inférieur à $P/2$ ne divise pas $g(n)$. Ensuite on construit une suite croissante (γ_k) avec $\gamma_0 = 0$ telle qu'au plus un nombre premier de l'intervalle $(\gamma_k P,\, \gamma_{k+1} P]$ ne divise pas $g(n)$. La construction d'une telle suite est expliquée aux paragraphes 3 et 4.

Dans le paragraphe 10, nous montrerons, à l'aide de théorèmes d'oscillation en théorie des nombres premiers, qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $P^+(g(n)) > \log g(n)$ et une infinité d'entiers n tels que $P^+ g(n) < \log g(n)$.

Pour cela nous rappellerons la définition des nombres ℓ–superchampions qui jouent pour la fonction ℓ le même rôle que les « superior highly composite numbers » de Ramanujan (cf. [23], § 32) pour la fonction nombre de diviseurs.

Dans le paragraphe 2 nous introduirons les tables numériques sur la distribution des nombres premiers qui figurent en annexe. Des tables plus longues sont déposées sur le site `http://math.univ-lyon1.fr/~deleglis/calculs.html`.

Dans le théorème 8.1 les nombres 5.54 et 10.8 pourraient être améliorés au prix d'un alourdissement des calculs numériques. Ces constantes ont été déterminées en calculant $P^+(g(n))$ pour tous les n jusqu'à 10^6. Cette borne pourrait être augmentée. Il est en effet possible d'adapter l'algorithme de [3] de façon à donner rapidement, pour deux nombres ℓ–superchampions consécutifs N et N' le maximum et le minimum de $P^+(g(n))$ dans l'intervalle $[\ell(N), \ell(N')]$.

1.1 Notations

Nous utiliserons les notations classiques suivantes.

1) Pour $i \geq 1$, p_i est le $i^{\text{ème}}$ nombre premier.
2) $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ est le nombre des nombres premiers $\leq x$.
3) $\theta(x)$ et $\psi(x)$ sont les fonctions de Chebyshev

$$\theta(x) = \sum_{1 \leq i \leq \pi(x)} \log p_i \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{k \leq K} \theta(x^{1/k}) \qquad (1.10)$$

   où K est le plus petit entier tel que $x^{1/K} < 2$.
4) Θ est la borne supérieure des parties réelles des zéros de la fonction ζ de Riemann. Sous l'hypothèse de Riemann, on a $\Theta = 1/2$.

5) $\log_2 x = \log\log x$ et pour $k \geq 3$, $\log_k(x) = \log(\log_{k-1}(x))$.

6) $\mathrm{Li}(x)$, le logarithme intégral de x, est défini pour $x > 1$ par

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\log t} = \gamma + \log_2 x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log x)^n}{n n!},$$

où $\gamma = 0.577\ldots$ est la constante d'Euler.

7) Soit f une fonction de la variable réelle x, continue par morceaux. On note $f(x^-)$ et $f(x^+)$ les nombres définis par

$$f(x^-) = \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} f(t) \qquad \text{et} \qquad f(x^+) = \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t).$$

1.2 Rappel des estimations de $\log g(n)$

Nous utiliserons les résultats effectifs suivants, démontrés dans [11] et [13].

$$\log g(n) \leq 1.053139976709\ldots\sqrt{n \log n}, \quad n \geq 1 \tag{1.11}$$

avec égalité pour $n = 1\,319\,766$.

$$\log g(n) \geq \sqrt{n \log n}, \qquad n \geq 906. \tag{1.12}$$

$$\log g(n) \leq \sqrt{n \log n}\left(1 + \frac{\log_2 n - 0.975}{2 \log n}\right), \quad n \geq 3 \tag{1.13}$$

$$\log g(n) \geq \sqrt{n \log n}\left(1 + \frac{\log_2 n - 1.18}{2 \log n}\right), \quad n \geq 899\,059 \tag{1.14}$$

Notons que la majoration (1.14) est meilleure que (1.13) pour $n \geq 68\,745\,487$.

Nous aurons aussi besoin des résultats asymptotiques de [12] :
Il existe une constante $a > 0$ telle que

$$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O\Big(\sqrt{n} e^{-a\sqrt{\log n}}\Big). \tag{1.15}$$

Si $\Theta < 1$, on a

$$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O\Big((n \log n)^{\Theta/2}\Big). \tag{1.16}$$

2 Fonctions portant sur les nombres premiers

2.1 Les fonctions θ et ψ de Chebyshev

2.1.1 Encadrements effectifs

Nous utiliserons les résultats suivants.

$$\theta(x) < x \text{ pour } x \leq 8 \cdot 10^{11}. \tag{2.1}$$

Schoenfeld (cf. [26] p. 360) mentionne que R. P. Brent a vérifié (2.1) pour $x < 10^{11}$. P. Dusart (cf. [5]) a calculé $\theta(x)$ jusqu'à 8.10^{11} et a établi la majoration suivante (qui améliore le résultat de [26] p. 360 où la majoration $\theta(x) < 1.000\,081\,x$ est prouvée pour $x > 0$)

$$\theta(x) < x + \frac{1}{36\,260}x \leq 1.000\,028\,x \quad (x > 0). \tag{2.2}$$

L'encadrement ci-dessous figure dans ([25], Th. 18)

$$x - 2.06\sqrt{x} < \theta(x) < x, \quad (0 < x \leq 10^8). \tag{2.3}$$

L'inégalité suivante (cf. [5]) améliore le résultat de [26] où le coefficient 0.2 était 8.072

$$|\theta(x) - x| \leq \frac{0.2\,x}{\log^2 x}, \quad (x \geq 3\,594\,641). \tag{2.4}$$

On trouvera les inégalités suivantes dans ([25], Th. 13)

$$\theta(x) \leq \psi(x) \leq \theta(x) + 1.42620\,\sqrt{x}, \qquad x > 0. \tag{2.5}$$

2.1.2 La fonction $\theta_{\min}$

Nous aurons aussi besoin de minorer $\dfrac{\theta(x)}{x}$ sur des intervalles de la forme $[y, +\infty)$. Notons

$$\theta_{\min}(y) = \inf_{x \geq y} \frac{\theta(x)}{x}\cdot \tag{2.6}$$

La fonction $\theta_{\min}$ est une fonction en escalier croissante et continue à droite. Puisque θ est constante sur tout intervalle $[p_{i-1}, p_i)$, le rapport $\theta(x)/x$ décroit sur cet intervalle, avec pour borne inférieure $\theta(p_{i-1})/p_i$. Il en résulte que

$$\theta_{\min}(y) = \inf_{p_i > y} \frac{\theta(p_{i-1})}{p_i} \tag{2.7}$$

et, si l'on définit l'indice i_y par $p_{i_y-1} \leq y < p_{i_y}$, on a

$$\theta_{\min}(y) = \inf\left\{\frac{\theta(p_{i_y-1})}{p_{i_y}}, \frac{\theta(p_{i_y})}{p_{i_y+1}}, \cdots\right\} = \min\left\{\frac{\theta(p_{i_y-1})}{p_{i_y}}, \theta_{\min}(p_{i_y})\right\}. \tag{2.8}$$

Par la formule (2.8), $\theta_{\min}$ est constante sur $\big[p_{i_y-1}, p_{i_y}\big)$; ainsi les points de discontinuité de $\theta_{\min}$ sont des nombres premiers que l'on appelle nombres $\theta_{\min}$–champions.

Pour tout nombre premier p, désignons par $^{\star}\!p$ le nombre premier précédant p. Soit p un nombre $\theta_{\min}$–champion. Puisque $\theta_{\min}$ est croissante, au point de discontinuité p, on a

$$\theta_{\min}(p) > \theta_{\min}(p^-). \tag{2.9}$$

Lorsque y tend vers p par valeurs inférieures, on a $p = p_{i_y}$, et les formules (2.8) et (2.9) donnent

$$\theta_{\min}(p^-) = \min\left\{\frac{\theta(^\star p)}{p},\, \theta_{\min}(p)\right\} = \frac{\theta(^\star p)}{p} < \theta_{\min}(p). \tag{2.10}$$

Si $p < q$ sont deux nombres $\theta_{\min}$–champions consécutifs, la fonction $\theta_{\min}$ est constante sur $[p,\, q)$ et, pour $p \le y < q$, on a

$$\theta_{\min}(y) = \theta_{\min}(p) = \theta_{\min}(q^-) = \frac{\theta(^\star q)}{q} < \theta_{\min}(q). \tag{2.11}$$

Ainsi, p est le plus grand nombre premier inférieur à q et vérifiant

$$\theta_{\min}(p^-) = \frac{\theta(^\star p)}{p} < \frac{\theta(^\star q)}{q}. \tag{2.12}$$

La table 1 contient les premiers $\theta_{\min}$–champions p et leurs records, $\theta_{\min}(p)$, arrondis par défaut. Pour $y \ge 2$ la valeur $\theta_{\min}(y)$ est donnée par

$$\theta_{\min}(y) = \theta_{\min}(p) \text{ avec } p \text{ le plus grand champion} \le y \text{ de } \theta_{\min}. \tag{2.13}$$

Pour calculer la table 1, on observe d'abord que pour $x \ge 10\,000$ on a $\dfrac{\theta(x)}{x} \ge 0.9794$. Pour $10^4 \le x \le 10^8$ cela résulte de (2.3) :

$$\frac{\theta(x)}{x} > 1 - \frac{2.06}{\sqrt{x}} \ge 1 - \frac{2.06}{\sqrt{10^4}} = 0.9794, \tag{2.14}$$

tandis que, pour $x > 10^8$, (2.4) implique

$$\frac{\theta(x)}{x} \ge 1 - \frac{0.2}{\log^2 x} \ge 1 - \frac{0.2}{\log^2 10^8} \ge 0.9994. \tag{2.15}$$

Le plus grand nombre premier $P < 10\,000$ vérifiant $\theta(\,^\star P)/P < 0.9794$ est $P = 7477$. Par (2.6), (2.14) et (2.15), on a $\theta_{\min}(10000) \ge 0.9794$, ce qui, par (2.7), entraîne $\theta(^\star p)/p \ge 0.9794$ pour $p \ge 10000$. Le choix $P = 7477$ implique $\theta(^\star p)/p \ge 0.9794$ pour $P < p < 10000$. On a donc, par (2.7), $\theta_{\min}(P) \ge 0.9794$ et, par (2.8),

$$\theta_{\min}(P^-) = \theta_{\min}(\,^\star P) = \min\left(\frac{\theta(\,^\star P)}{P}, \theta_{\min}(P)\right) = \frac{\theta(\,^\star P)}{P} < \theta_{\min}(P),$$

ce qui montre que $P = 7477$ est un $\theta_{\min}$–champion.

Puis, par récurrence descendante, à partir d'un champion q, on détermine le champion p précédant q par la règle (2.12).

2.1.3 La fonction θ_d

Définition 2.1. *On définit la fonction θ_d pour $y \geq 1$ par*

$$\theta_d(y) = \sup_{x \geq y} \left| \frac{\theta(x)}{x} - 1 \right| \log^2 x,$$

de sorte que, pour tout $x \geq y$ on a

$$\left| \frac{\theta(x)}{x} - 1 \right| \leq \frac{\theta_d(y)}{\log^2 x}. \tag{2.16}$$

Le résultat (2.4) de Dusart entraine :

Lemme 2.1. *Pour $y \geq 3\,594\,641$ on a $\theta_d(y) \leq 0.2$.*

Lemme 2.2. *Posons $p_0 = 1$ et soit $i \geq 0$ tel que $p_i < p_{i+1} < 8 \cdot 10^{11}$. La fonction $x \mapsto \left| \frac{\theta(x)}{x} - 1 \right| \log^2 x$ est croissante sur l'intervalle $[p_i, p_{i+1})$ et l'on a*

$$\sup_{p_i \leq x < p_{i+1}} \left| \frac{\theta(x)}{x} - 1 \right| \log^2 x = \frac{p_{i+1} - \theta(p_i)}{p_{i+1}} \log^2 p_{i+1}.$$

Démonstration. Soit x vérifiant $p_i \leq x < p_{i+1}$ et posons $f(x) = \left| \frac{\theta(x)}{x} - 1 \right| \log^2 x$. Par (2.1) on a

$$f(x) = \left(1 - \frac{\theta(p_i)}{x} \right) \log^2 x$$

et $f'(x) = \dfrac{\log x}{x^2} f_1(x)$ avec $f_1(x) = \theta(p_i)(\log x - 2) + 2x$. La fonction f_1 est croissante, donc $f_1(x) \geq f_1(p_i) > 0$ pour $p_i \geq 11 > e^2$. Le calcul de $f_1(p_i)$ pour $0 \leq i \leq 4$ montre que $f_1(p_i) > 0$ pour tout $i \geq 0$. Ainsi f est croissante sur l'intervalle $[p_i, p_{i+1})$ ce qui prouve le lemme. $\square$

Si p est un nombre premier, posons $F(p) = \left(1 - \dfrac{\theta(^\star p)}{p} \right) \log^2 p$ où $^\star p$ désigne le nombre premier précédant p, avec la convention $^\star 2 = 1$. Le calcul montre que $P = 3\,594\,641$ est premier et que l'on a $F(P) = 0.200386 \cdots > 0.2$.

Il résulte des lemmes 2.1 et 2.2 que l'on a pour $y < P$

$$\theta_d(y) = \max_{y < p \leq P} F(p). \tag{2.17}$$

La formule (2.17) montre que, sur l'intervalle $[1, P)$, θ_d est une fonction en escalier décroissante et continue à droite. Appelons θ_d–champions les nombres premiers $p \leq P$ qui sont points de discontinuité de θ_d. Convenons aussi que 1 est un θ_d–champion. Le nombre P est aussi un θ_d–champion : en effet, par le lemme 2.1, on a $\theta_d(P) \leq 0.2$ tandis que $\theta_d(P^-) = F(P) > 0.2$.

Si p et q sont deux nombres θ_d–champions consécutifs vérifiant $1 \le p < q \le P$, on a donc pour $p \le y < q$:

$$\theta_d(y) = \theta_d(p) = \theta_d(q^-) = F(q) > \theta_d(q)$$

et, si $p \neq 1$, p est le plus grand nombre premier inférieur à q et vérifiant

$$F(p) > F(q). \tag{2.18}$$

Le nombre $P = 3\,594\,641$ est un θ_d–champion. Par la formule (2.18), si $q \le P$ est un nombre θ_d–champion, le champion précédant q est le plus grand nombre premier p vérifiant $p < q$ et $F(p) > F(q)$.

On calcule ainsi par récurrence descendante les nombres θ_d–champions jusqu'à 59. Mais pour tout nombre premier $p < 59$, on a $F(p) < F(59)$. La fonction θ_d est donc constante sur l'intervalle $[1, 59)$ et vaut $F(59) = 3.9648\ldots$. On a donc, pour tout $x \ge 1$,

$$\left|\frac{\theta(x)}{x} - 1\right| \log^2(x) \le \theta_d(x) \le \theta_d(59^-) = F(59) < 3.965.$$

La table 2 contient la liste des premiers nombres θ_d–champions.

2.2 Terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers

Soit θ la fonction de Chebyshev définie en (1.10).

1. Il existe $a > 0$ tel que

$$\theta(x) = x + O\Big(x \exp\big(-a\sqrt{\log x}\,\big)\Big) \tag{2.19}$$

2. Si $\Theta < 1$, on a

$$\theta(x) = x + O\big(x^{\Theta} \log^2 x\big). \tag{2.20}$$

3. Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a

$$|\theta(x) - x| \le \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log^2 x, \qquad x \ge 599. \tag{2.21}$$

Les points 1. et 2. se trouvent dans les traités de théorie analytique des nombres, par exemple [8] ou [6]. Le point 3. est prouvé dans [26], p. 337.

2.3 Écarts entre nombres premiers

1. Nous utiliserons le résultat suivant de Baker, Harman et Pintz ([1] p. 562). Soit $\delta = 0.525$, alors, pour x assez grand, on a

$$\pi(x + x^{\delta}) - \pi(x) \ge \frac{9}{100}\frac{x^{\delta}}{\log x}, \tag{2.22}$$

ce qui implique que, pour p_i assez grand, $p_{i+1} \le p_i + p_i^{\delta}$, et donc l'existence de a tel que

$$p_{i+1} \le p_i + a p_i^{\delta}, \qquad i \ge 1. \tag{2.23}$$

2. De façon effective, Dusart a démontré dans [4], proposition 6.8, que, pour $x \geq 396\,738$, l'intervalle

$$\left[x,\, x + \frac{x}{25 \log^2 x}\right] \tag{2.24}$$

contient un nombre premier. Cela entraine pour $p_i \geq 396\,833 = p_{33\,609}$,

$$p_{i+1} \leq p_i + \frac{p_i}{25\,\log^2 p_i}. \tag{2.25}$$

3. Si l'hypothèse de Riemann est vraie la formule (2.21) permet de montrer que, pour $x \geq 599$, l'intervalle $\left[x - \sqrt{x}\log^2 x/(4\pi),\, x\right]$ contient un nombre premier (cf. [24], (1)).
Dans l'article [2], toujours sous l'hypothèse de Riemann, Cramér démontre qu'il existe b tel que l'intervalle $[x,\, x + b\sqrt{x}\log x]$ contienne un nombre premier. Ramaré et Saouter ont rendu ce résultat effectif en montrant dans ([24], th. 1) que, pour $x \geq 2$, l'intervalle

$$\left[x - \frac{8}{5}\sqrt{x}\log x,\, x\right] \tag{2.26}$$

contient un nombre premier, ce qui entraine que, pour $p_i \geq 3$,

$$p_{i-1} \geq p_i - \frac{8}{5}\sqrt{p_i}\log p_i. \tag{2.27}$$

4. Dans l'article [2], la « Conjecture de Cramér » est énoncée comme suit

$$p_{i+1} - p_i = O\big(\log^2 p_i\big)\,. \tag{2.28}$$

Cette conjecture est étayée par les calculs numériques (cf. par exemple [15]).

2.4 Les fonctions η_k

2.4.1 Définition

Soit $k \geq 1$ un nombre entier. Par le théorème des nombres premiers, le rapport p_{i-k}/p_i tend vers 1 quand $i \to +\infty$. Pour $i_0 \geq k+1$ il n'y a donc qu'un nombre fini d'entiers i tels que $\dfrac{p_{i-k}}{p_i} \leq \dfrac{p_{i_0-k}}{p_{i_0}} < 1$, et la définition suivante a un sens.

Définition 2.2. *On définit la fonction η_k sur l'intervalle $[p_k,\, +\infty)$ par*

$$\eta_k(x) = \min\left\{\frac{p_{i-k}}{p_i}\middle| p_i > x\right\}. \tag{2.29}$$

Il résulte de (2.29) que η_k est une fonction en escalier croissante dont les points de discontinuté sont des nombres premiers appelés *nombres η_k–champions.* Par convention, p_k est un nombre η_k–champion. Plus précisément, si $p_{i'}$ et $p_{i''}$ sont deux nombres η_k–champions consécutifs, on a pour $p_{i'} \leq x < p_{i''}$

$$\eta_k(x) = \eta_k(p_{i'}) = \frac{p_{i''-k}}{p_{i''}}.$$

Le nombre premier p_i est un nombre η_k–champion si l'on a ou bien $i = k$ ou bien $i > k$ et

$$\eta_k(p_{i-1}) < \eta_k(p_i). \tag{2.30}$$

Lemme 2.3. *Soit $x \geq p_k$. Pour tout $y \geq x$, l'intervalle $(\eta_k(x)y,\, y]$ contient au moins k nombres premiers, et $\eta_k(x)$ est le plus grand réel λ tel que $(\lambda y,\, y]$ contienne au moins k nombres premiers pour tout $y \geq x$.*

Démonstration. Notons $\eta = \eta_k(x)$. Si l'intervalle $(\eta y,\, y]$ ne contient pas k nombres premiers, soit p_i le plus petit nombre premier qui est strictement plus grand que y. Alors

$$p_{i-k} \leq \eta y < y < p_i,$$

et donc $\eta_k(x) = \dfrac{\eta y}{y} > \dfrac{p_{i-k}}{p_i}$ ce qui est absurde car $p_i > x$.

Réciproquement, posons $\eta_k(x) = \frac{p_{i_0-k}}{p_{i_0}}$ avec $p_{i_0} > x$ et supposons que l'intervalle $(\lambda y,\, y]$ contienne k nombres premiers pour tout $y \geq x$. Choisissons y tel que $p_{i_0} > y > \max(p_{i_0-1}, x)$. On doit avoir $\lambda y < p_{i_0-k}$, ce qui, en faisant tendre y vers p_{i_0}, donne $\lambda \leq \eta_k(x)$. $\square$

2.4.2 Minoration de η_k

Lemme 2.4. *Soit $i_0 \geq 1$ un entier et $f \;:\; [p_{i_0},\, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On suppose que l'on a la majoration*

$$p_{i+1} \leq p_i + f(p_{i+1}), \qquad i \geq i_0. \tag{2.31}$$

Soit $k \geq 1$ et $x \geq p_{i_0+k-1}$. Si la fonction $t \mapsto f(t)/t$ est décroissante pour $t \geq x$, on a

$$\eta_k(x) \geq 1 - k\frac{f(x)}{x}. \tag{2.32}$$

Démonstration. Soit $i \geq 1$ tel que $p_i > x$. Puisque $x \geq p_{i_0+k-1}$, on a $i \geq i_0 + k$. Ecrivons l'inégalité (2.31) pour $i-1$, $i-2$, $\ldots, i-k$; on obtient

$$\begin{array}{rcl}
p_i & \leq & p_{i-1} + f(p_i) \\
p_{i-1} & \leq & p_{i-2} + f(p_{i-1}) \leq p_{i-2} + f(p_i) \\
 & \cdots & \\
p_{i-k+1} & \leq & p_{i-k} + f(p_{i-k+1}) \leq p_{i-k} + f(p_i).
\end{array}$$

En ajoutant ces inégalités il vient

$$p_i \le p_{i-k} + kf(p_i)$$

et, par la décroissance de $f(t)/t$,

$$\frac{p_{i-k}}{p_i} \ge 1 - k\frac{f(p_i)}{p_i} \ge 1 - k\frac{f(x)}{x}$$

ce qui, d'après la définition (2.29) de η_k, prouve (2.32). □

Proposition 2.1.

1. *Il existe $a > 0$ tel que, pour $x \ge p_k$, ,on ait*

$$\eta_k(x) \ge 1 - k\frac{a}{x^{0.475}}\cdot$$

2. *Soit $i_0 = 33\,609$. Pour i voisin de i_0 les valeurs de p_i sont*

$i =$	33 608	33 609	33 610	33 611	33 612
$p_i =$	396 733	396 833	396 871	396 881	396 883

Pour $x \ge p_{i_0+k-1}$ on a

$$\eta_k(x) \ge 1 - \frac{k}{25\log^2 x}\cdot \tag{2.33}$$

3. *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a pour $x \ge \max(p_k, e^2)$,*

$$\eta_k(x) \ge 1 - \frac{8k}{5}\frac{\log x}{\sqrt{x}}\cdot \tag{2.34}$$

4. *Sous la conjecture de Cramér (2.28), il existe $a > 0$ tel que, pour $x \ge \max(p_k, e^2)$ on ait*

$$\eta_k(x) \ge 1 - ka\frac{\log^2 x}{x}\cdot \tag{2.35}$$

Démonstration.

1. On applique le lemme 2.4 avec $i_0 = 1$ et $f(t) = at^\delta$ où $\delta = 0.525$ et a est la constante donnée en (2.23).
2. On choisit $i_0 = 33\,609$ et $f(t) = t/(25\log^2(t))$. Par (2.25), l'hypothèse (2.31) du lemme 2.4 est vérifiée, et l'application de ce lemme donne le résultat.
3. Cette fois, on applique le lemme 2.4 avec $i_0 = 1$ et $f(t) = \frac{8}{5}\sqrt{t}\log t$. L'hypothèse (2.31) résulte de (2.27) et la fonction $f(t)/t$ est décroissante pour $t \ge e^2$.
4. Par la conjecture de Cramér (2.28), il existe a tel que $p_{i+1} \le p_i + a\log^2 p_i$ pour tout $i \ge 1$. On choisit donc $i_0 = 1$ et $f(t) = a\log^2 t$ dans le lemme 2.4 qui donne le résultat en remarquant que $f(t)/t$ est décroissante pour $t \ge e^2$.

□

2.4.3 Tabulation des valeurs de η_k.

On trouvera en annexe les tables 3, 4 et 5 qui permettent le calcul de $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ et $\eta_3(x)$. Expliquons le calcul des valeurs de η_3 ; on obtient la table de η_k pour $k \neq 3$ de façon similaire.

Soit $x_0 = 10^6$. Par la proposition 2.1 on a

$$\eta_3(x_0) > 1 - \frac{3}{25\,\log^2(x_0)} > 0.99937.$$

Par la croissance de la fonction η_3, on a donc pour tout $x \geq 10^6$, $\eta_3(x) > 0.99937$. De la définiton (2.29) de η_3 on déduit

$$\eta_3(p_i) = \min\left\{\frac{p_{i-2}}{p_{i+1}}, \frac{p_{i-1}}{p_{i+2}}, \dots\right\} = \min\left\{\frac{p_{i-2}}{p_{i+1}},\ \eta_3(p_{i+1})\right\}. \tag{2.36}$$

Soit i_0 le plus grand indice tel que $p_{i_0+1} < 10^6$ et $p_{i_0-2}/p_{i_0+1} \leq 0.99937$ (le calcul donne $i_0 = 15\,929$, $p_{i_0-2} = 175\,141$, $p_{i_0-1} = 175\,211$, $p_{i_0} = 175\,229$, $p_{i_0+1} = 175\,261$). On a

$$p_i > p_{i_0} \implies \eta_3(p_i) > 0.99937 \tag{2.37}$$

et, par (2.36),

$$\eta_3(p_{i_0}) = \frac{p_{i_0-2}}{p_{i_0+1}} = \frac{175\,141}{175\,261} = 0.99931\dots \tag{2.38}$$

ce qui, par (2.30), prouve que $p_{i_0+1} = 175\,261$ est un nombre η_3–champion.

Par la formule (2.36), on calcule ensuite $\eta_3(p_i)$ pour $i = i_0 - 1$, $i_0 - 2$, $\dots, 1$ et, par (2.30), on en déduit les nombres η_3–champions.

2.4.4 La fonction δ_3

Définition 2.3. *On définit la fonction δ_3, pour $y \geq p_3 = 5$, par*

$$\delta_3(y) = \sup_{x \geq y}(1 - \eta_3(x)) \log^2 x.$$

Pour tout $x \geq y$ on a donc

$$1 - \eta_3(x) \leq \frac{\delta_3(y)}{\log^2(x)}\cdot \tag{2.39}$$

La fonction δ_3 est décroissante. La minoration (2.33) de la proposition 2.1 entraine

$$\delta_3(396\,881) \leq \frac{3}{25} = 0.12. \tag{2.40}$$

On a remarqué, lors de la démonstration du lemme 2.3, que $1 - \eta_3$ est constante sur chaque intervalle $[p_{i-1}, p_i)$ $(i \geq k+1)$. La fonction $x \mapsto (1 -$

$\eta_3(x)) \log^2 x$ est donc strictement croissante sur l'intervalle $[p_{i-1}, p_i)$, et la borne supérieure de ses valeurs sur cet intervalle est $(1 - \eta_3(p_{i-1})) \log^2(p_i)$.

Il en résulte que, pour $y \geq 5$,

$$\delta_3(y) = \max_{p_i > y} G(p_i) \quad \text{avec} \quad G(p_i) = \big(1 - \eta_3(p_{i-1})\big) \log^2(p_i). \tag{2.41}$$

La formule (2.41) montre que δ_3 est une fonction en escalier décroissante continue à droite. Appelons δ_3–champions les nombres premiers p qui sont points de discontinuité de δ_3. Nous dirons aussi que 5 est un δ_3–champion. Si $p < q$ sont deux nombres δ_3–champions consécutifs, on a pour $p \leq y < q$

$$\delta_3(y) = \delta_3(p) = \delta_3(q^-) = G(q) > \delta_3(q)$$

et, si $p > 5$, p est le plus grand nombre premier inférieur à q tel que $G(p) > G(q)$.

Il résulte de (2.41) et (2.40) que, pour $p_i > 396\,881$, on a $G(p_i) \leq \delta_3(396\,881) < 0.12$. Lorsque $175\,261 < p_i \leq 396\,881$, l'implication (2.37) donne $\eta_3(p_{i-1}) \geq 0.99937$ et $G(p_i) \leq 0.00063 \log^2(396\,881) < 0.12$.

À l'aide de la table construite au paragraphe 2.4.3, pour $7 \leq p_i \leq 175\,261$, on sait calculer $\eta_3(p_{i-1})$ et $G(p_i)$. On recherche alors le plus grand nombre premier $p_i < 396\,881$ pour lequel on a $G(p_i) > 0.12$. C'est $p_i = 88\,211$ qui est un nombre δ_3–champion. Si q est un δ_3–champion, le nombre δ_3–champion précédant q est le plus grand nombre premier p tel que $G(p) > G(q)$. En énumérant les nombres premiers p inférieurs à $88\,211$ on peut ainsi dresser la table 6 des nombres δ_3–champions.

3 Facteurs premiers de $g(n)$ et g–couples

Notation : Pour tout intervalle réel I et tout réel λ on note λI l'intervalle défini par $\lambda I = \{\lambda x \; ; \; x \in I\}$.

Les deux lemmes suivants, dont la démonstration est facile, se trouvent respectivement dans ([16], p. 142) et ([7], p. 408).

Lemme 3.1. *Si q divise $g(n)$ et si p', p'', q sont premiers distincts et $q \geq p' + p''$ alors p' ou p'' divise $g(n)$.*

Lemme 3.2. *Si q est un diviseur premier de $g(n)$, il existe au plus un nombre premier $\leq q/2$ qui ne divise pas $g(n)$.*

Définition 3.1. *Soit γ, γ' avec $0 < \gamma < \gamma' < 1$ et $\gamma' < \dfrac{1+\gamma^2}{2}$. On définit*

$$\alpha = 2\gamma' - 1 \quad \text{et} \quad \beta = \gamma^2. \tag{3.1}$$

On a alors $\alpha < \beta < \gamma < \gamma'$ et le couple d'intervalles (I, J) défini par

$$I = I(\gamma, \gamma') = (\alpha, \, \beta] \;\; \text{et} \; J = J(\gamma, \gamma') = \big(\gamma, \, \gamma'\big] \, .$$

est appelé le g-couple associé à (γ, γ').

En remarquant que $\gamma = \sqrt{\beta}$ et que $\gamma' = \dfrac{1+\alpha}{2}$ le lemme suivant est le lemme 2 dans [7], dont nous rappelons la preuve.

Lemme 3.3. *Soit (I, J) un g-couple, $n \geq 1$ et q un facteur premier de $g(n)$. Si qI contient au moins un diviseur premier de $g(n)$ tous les nombres premiers appartenant à qJ, à l'exception d'au plus un, sont des diviseurs de $g(n)$.*

Démonstration. Par hypothèse, qI contient un diviseur premier q' de $g(n)$ et donc $\alpha q < q' \leq \beta q < q$. S'il existait dans qJ deux nombres premiers p et p' ne divisant pas $g(n)$, on aurait $\gamma q < p < p' \leq \gamma' q$. En posant $M = \dfrac{pp'}{qq'} g(n)$, il viendrait $\ell(M) - \ell(g(n)) = p + p' - q - q' \leq 2\gamma' q - q - \alpha q = 0$ et $M > \dfrac{\gamma^2 q^2}{\beta q^2} g(n) = g(n)$, en contradiction avec (1.1) et (1.3). □

Définition 3.2. *Une g–suite de longueur ℓ $(1 \leq \ell \leq +\infty)$ est définie par la donnée de $(\gamma_k)_{0 \leq k \leq \ell+1}$ satisfaisant $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \dfrac{1}{2}$ et , pour $1 \leq k \leq \ell$*

$$0 < \gamma_k < 1 \quad et \quad \gamma_k < \gamma_{k+1} < \frac{1+\gamma_k^2}{2} \cdot \tag{3.2}$$

On lui associe les intervalles $I_0 = (\alpha_0, \beta_0] = \left(0, \frac{1}{4}\right]$, $J_0 = \left(0, \frac{1}{2}\right]$ et, pour $1 \leq k \leq \ell$, I_k et J_k définis par

$$\alpha_k = 2\gamma_{k+1} - 1,\ \beta_k = \gamma_k^2,\ I_k = (\alpha_k, \beta_k] \ \ et\ J_k = (\gamma_k, \gamma_{k+1}] \cdot \tag{3.3}$$

Il résulte de (3.3) que, pour tout $1 \leq k \leq \ell$, le couple (I_k, J_k) est un g–couple.

Nous étudierons au paragraphe 6 les *g-suites uniformes* pour lesquelles le rapport α_k/β_k est constant.

Définition 3.3. *Soit une g–suite $(\gamma_k)_{0 \leq k \leq \ell+1}$ de longueur finie $\ell \geq 1$ et $y \geq 12$. Pour $1 \leq k \leq \ell$ on note m_k le cardinal de l'ensemble des indices $j \in \{0, 1, \dots, \ell\}$ tels que $I_k \cap J_j \neq \emptyset$.*

La g–suite $(\gamma_k)_{0 \leq k \leq \ell+1}$ est y-admissible *si pour tout réel $\lambda \geq y$ et tout k, $1 \leq k \leq \ell$, l'intervalle λI_k contient au moins m_k+1 nombres premiers, autrement dit, d'après le lemme 2.3, si, pour $1 \leq k \leq \ell$, on a $\alpha_k \leq \eta_{m_k+1}(\beta_k y)\beta_k$.*

Remarque 3.1. Puisque $\beta_1 = \gamma_1^2 = 1/4$ est contenu dans $J_0 = \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ on a $m_1 = 1$. Pour que la g–suite de longueur 1, $\left(\alpha_1, \dfrac{1}{4}\right], \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1+\alpha_1}{2}\right]$ soit y–admissible il suffit que pour tout $\lambda \geq y$ l'intervalle $(\lambda\alpha_1, \lambda/4]$ contienne au moins deux nombres premiers, c'est à dire que $\alpha_1 \leq \eta_2(y/4)/4$. En particulier, pour $\lambda = y$, l'intervalle $(\alpha_1 y, y]$ contient au moins 2 nombres premiers, ce qui nécessite $y/4 \geq 3$.

Proposition 3.1. *Soit $q = P^+(g(n))$ le plus grand facteur premier de $g(n)$ et $(\gamma_k)_{0\le k\le \ell+1}$ une g–suite q–admissible de longueur ℓ. Alors, pour $0 \le k \le \ell$ l'intervalle $qJ_k = q\,(\gamma_k,\ \gamma_{k+1}]$ contient au plus un nombre premier qui ne divise pas $g(n)$. De plus*

$$q \le \frac{\log g(n)}{\dfrac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} - k\dfrac{\log q}{q} - \dfrac{\sum_{j=1}^{k+1}\log\gamma_j}{q}} \le \frac{\log g(n)}{\dfrac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} - k\dfrac{\log q}{q}}\cdot \tag{3.4}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{P}(k)$ la propriété *Il existe au plus un nombre premier dans qJ_k qui ne divise pas $g(n)$.*

Pour $k=0$, par le lemme 3.2, l'intervalle $qJ_0 = \left(0,\ \dfrac{q}{2}\right]$ contient au plus un nombre premier qui ne divise pas $g(n)$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

L'intervalle $qI_1 = q\left(\alpha_1,\ \frac14\right]$ est contenu dans $(0,\ q/2]$ qui, par le lemme 3.2, contient au plus un nombre premier ne divisant pas $g(n)$. Compte tenu de la définition 3.3 et de la remarque 3.1, qI_1 contient au moins $m_1+1=2$ nombres premiers. L'un de ces 2 nombres divise $g(n)$, et par le lemme 3.3, il y a au plus un nombre premier dans qJ_1 qui ne divise pas $g(n)$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vrai.

Supposons $k<\ell$ et $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(k-1)$ vrais. La borne supérieure de I_k est $\beta_k = \gamma_k^2 < \gamma_k$. On a donc $I_k \subset \displaystyle\bigcup_{j=0}^{k-1} J_j$. Par l'hypothèse de récurrence, chacun des qJ_j contient au plus un nombre premier qui ne divise pas $g(n)$. Puisque qI_k rencontre m_k intervalles qJ_j il contient au plus m_k nombres premiers qui ne divisent pas $g(n)$. Or, par définition de la q–admissibilité, qI_k contient au moins m_k+1 nombres premiers. L'un d'entre eux divise $g(n)$ et, par le lemme 3.3, J_k contient au plus un nombre premier qui ne divise pas $g(n)$. C'est–à–dire que $\mathcal{P}(k)$ est vrai.

On vient de prouver que $g(n)$ est divisible par tous les nombres premiers de $(0,\ q\gamma_{k+1}]$ sauf au plus un nombre premier $q_j \in q\,(\gamma_j,\ \gamma_{j+1}]$ pour chaque $j = 0,1,2,\ldots,k$. Puisque q divise $g(n)$ on a donc

$$g(n) \ge\ q\,\frac{\prod_{p\,\le\, q\gamma_{k+1}} p}{\prod_{j=0}^{k} q_j}\ \ge\ q\,\frac{\prod_{p\,\le\, q\gamma_{k+1}} p}{\prod_{j=0}^{k} q\gamma_{j+1}}\cdot$$

On en déduit $\log g(n) \ge \theta(q\gamma_{k+1}) - \displaystyle\sum_{j=1}^{k+1}\log\gamma_j - k\log q$. Soit

$$q\left(\frac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} - \frac1q\sum_{j=1}^{k+1}\log\gamma_j - k\frac{\log q}{q}\right) \le \log g(n).$$

C'est la première majoration de (3.4). La deuxième résulte de $\sum_{j=1}^{k+1} \log \gamma_j < 0$.

$\square$

Proposition 3.2. *Soit trois nombres réels positifs* n_0*,* y*,* a *vérifiant*

$$12 \le y \le a\sqrt{n_0 \log n_0}$$

et $k \ge 1$ *un nombre entier. Faisons l'hypothèse qu'il existe une* g*–suite* $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$*,* y*–admissible de longueur* k*, définissons*

$$D_k = \gamma_{k+1}\theta_{\min}(y\gamma_{k+1}) - k\frac{\log y}{y} - \frac{\sum_{j=1}^{k+1} \log \gamma_j}{y} \tag{3.5}$$

et supposons $D_k > 0$*. Alors, pour* $n \ge n_0$*, on a*

$$P^+(g(n)) \le \max(a, b)\sqrt{n \log n} \quad \text{avec} \quad b = \frac{1.05314}{D_k}\cdot \tag{3.6}$$

De plus, si $n \ge n_0 \ge 68\,745\,487$*, on a*

$$P^+(g(n)) \le \max(a, b')\sqrt{n \log n} \quad \text{avec} \quad b' = \frac{1}{D_k}\left(1 + \frac{\log_2 n_0 - 0.975}{2\log n_0}\right)\cdot \tag{3.7}$$

Démonstration. Soit $n \ge n_0$ et posons pour simplifier $q = P^+(g(n))$.
Ou bien $q < y$ et alors

$$q < y \le a\sqrt{n_0 \log n_0} \le a\sqrt{n \log n} \tag{3.8}$$

ou bien $q \ge y$ et la suite $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$ est a fortiori q–admissible. La majoration (3.4) de la proposition 3.1 donne alors

$$q \le \frac{\log g(n)}{\dfrac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} - k\dfrac{\log q}{q} - \dfrac{\sum_{j=1}^{k+1} \log \gamma_j}{q}}. \tag{3.9}$$

On minore $\theta(q\gamma_{k+1})/q$ par $\gamma_{k+1}\theta_{\min}(y\gamma_{k+1})$ (cf. § 2.1.2). On remarque aussi que $\sum_{j=1}^{k+1} |\log \gamma_j| \le (k+1)\log 2 \le 2k \log 2$ et que la fonction $t \mapsto (k \log t + \sum_{j=1}^{k+1} \log \gamma_j)/t$ est décroissante pour $t \ge 4e$. La majoration (3.9) entraine donc $q \le (\log g(n))/D_k$.

On utilise enfin l'inégalité (1.11) qui donne la majoration $q \le b\sqrt{n \log n}$, qui, avec (3.8), prouve (3.6). La preuve de (3.7) est similaire en majorant $\log g(n)$ à l'aide de (1.13) au lieu de (1.11). $\square$

4 La g-suite y–admissible optimale

La majoration (3.4) de la proposition 3.1 nous conduit à construire des g-suites y–admissibles dont les termes γ_k soient aussi grands que possibles. C'est l'objet de ce paragraphe.

Soit une $y \geq 12$ et une g–suite y–admissible de longueur 1, $(\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1/2, \gamma_2)$. Vu (3.3), $\gamma_2 = \dfrac{1+\alpha_1}{2}$; la plus grande valeur de γ_2 est donc obtenue en donnant à α_1 la plus grande valeur possible. Or, par la remarque 3.1, la suite $(\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1/2, \gamma_2)$ est y–admissible si et seulement si $\alpha_1 \leq \frac{1}{4}\eta_2\big(\frac{y}{4}\big)$. La plus grande valeur de γ_2 est donc obtenue en posant $\alpha_1 = \dfrac{1}{4}\eta_2\big(\dfrac{y}{4}\big)$ et $\gamma_2 = \dfrac{1+\alpha_1}{2}$.

Soit une g–suite y–admissible de longueur k, $(\gamma_j)_{0\leq j\leq k+1}$ que l'on cherche à prolonger. La relation $\gamma_{k+1} = \beta_{k+1}^2$ détermine β_{k+1}. La relation $\gamma_{k+2} = \dfrac{1+\alpha_{k+1}}{2}$ montre que la plus grande valeur de γ_{k+2} est obtenue en choisissant α_{k+1} le plus grand possible. On pose $m = 1$ et on essaie

$$\alpha_{k+1} = \beta_{k+1}\eta_{m+1}(y\beta_{k+1}) \tag{4.1}$$

– Si $\alpha_{k+1} \leq \alpha_k$ la construction échoue car il est impossible de satisfaire $\gamma_{k+1} = \dfrac{1+\alpha_k}{2} < \dfrac{1+\alpha_{k+1}}{2} = \gamma_{k+2}$.
– Si $\alpha_{k+1} > \alpha_k$ considérons $I_{k+1} = (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$ Si cet intervalle rencontre au plus m des intervalle $J_0, J_1, \ldots, J_k$ on termine en choisissant $\gamma_{k+2} = \dfrac{1+\alpha_{k+1}}{2}$. Si I_{k+1} rencontre $m' > m$ intervalles parmi $J_0, J_1, \ldots, J_k$, il faut recommencer le choix de α_{k+1} au moyen de la formule (4.1) en incrémentant m.

Plus formellement cette construction est décrite dans l'algorithme 1. Cet algorithme n'est pas certain de terminer, cependant il permet de calculer la g–suite (γ_k) de longueur 21 et y–admissible (avec $y = 4703.39$) qui sera utilisée au paragraphe 5.

5 Majoration de $\log P^+(g(n))$ pour $n \geq x$.

Théorème 5.1. *Pour tout $n \geq 4$ on a*

$$\frac{P^+(g(n))}{\sqrt{n\log n}} \leq \frac{P^+(g(215))}{\sqrt{215\log(215)}} = 1.26542463\ldots \tag{5.1}$$

le maximum étant seulement atteint pour $n = 215$ avec $g(215) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 43$ et $P^+(g(215)) = 43$.

Démonstration. On applique la proposition 3.2 avec $n_0 = 10^6$, $a = 1.2654$ et $y = 4703.39$. On construit à l'aide de l'algorithme 1 les 21 premiers termes de la g–suite y–admissible optimale. On obtient les intervalles suivants :

Algorithme 1 : Calcul de $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \gamma_{k+2}$ à partir de γ_{k+1}, α_k et y

$\beta_{k+1} = \gamma_{k+1}^2, \quad m = 1$
Répéter
  $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1}\eta_{m+1}(y\beta_{k+1})$
  si $\alpha_{k+1} \le \alpha_k$ **alors**
    Renvoyer ECHEC
  sinon
    $m = m + 1$
jusqu'à ce que
  $(\alpha_{k+1},\ \beta_{k+1}]$ rencontre au plus m intervalles $(0,\ \gamma_1], \ldots, (\gamma_k,\ \gamma_{k+1}]$
$\gamma_{k+2} = \dfrac{1 + \alpha_{k+1}}{2}$

k	α_k	β_k	γ_{k+1}	$\{j\}$	D_k
1	$0.2426\ldots$	$0.2500\ldots$	$0.621326\ldots$	0	$0.599249\ldots$
2	$0.3786\ldots$	$0.3860\ldots$	$0.689343\ldots$	0	$0.663300\ldots$
3	$0.4669\ldots$	$0.4751\ldots$	$0.733450\ldots$	0	$0.706255\ldots$
4	$0.5308\ldots$	$0.5379\ldots$	$0.765402\ldots$	1	$0.739341\ldots$
5	$0.5780\ldots$	$0.5858\ldots$	$0.789031\ldots$	1	$0.760626\ldots$
6	$0.6135\ldots$	$0.6225\ldots$	$0.806763\ldots$	$1, 2$	$0.776159\ldots$
7	$0.6422\ldots$	$0.6508\ldots$	$0.821112\ldots$	2	$0.788389\ldots$
8	$0.6660\ldots$	$0.6742\ldots$	$0.833025\ldots$	2	$0.798242\ldots$
9	$0.6845\ldots$	$0.6939\ldots$	$0.842282\ldots$	$2, 3$	$0.805505\ldots$
10	$0.7019\ldots$	$0.7094\ldots$	$0.850985\ldots$	3	$0.812224\ldots$
11	$0.7165\ldots$	$0.7241\ldots$	$0.858275\ldots$	3	$0.817565\ldots$
12	$0.7266\ldots$	$0.7366\ldots$	$0.863347\ldots$	$3, 4$	$0.820742\ldots$
13	$0.7375\ldots$	$0.7453\ldots$	$0.868760\ldots$	4	$0.824250\ldots$
14	$0.7467\ldots$	$0.7547\ldots$	$0.873399\ldots$	4	$0.827003\ldots$
15	$0.7547\ldots$	$0.7628\ldots$	$0.877397\ldots$	4	$0.829130\ldots$
16	$0.7594\ldots$	$0.7698\ldots$	$0.879717\ldots$	$4, 5$	$0.829621\ldots$
17	$0.7657\ldots$	$0.7739\ldots$	$0.882877\ldots$	5	$0.830930\ldots$
18	$0.7712\ldots$	$0.7794\ldots$	$0.885632\ldots$	5	$0.831844\ldots$
19	$0.7760\ldots$	$0.7843\ldots$	$0.888043\ldots$	5	$0.832421\ldots$
20	$0.7803\ldots$	$0.7886\ldots$	$0.890159\ldots$	5	$0.832710\ldots$
21	$0.7816\ldots$	$0.7923\ldots$	$0.890844\ldots$	$5, 6$	$0.831605\ldots$

La colonne $\{j\}$ contient les valeurs de j telles que I_k rencontre J_j. Ainsi la valeur de m_k est le nombre des valeurs figurant dans la $k^{\text{ème}}$ ligne de la colonne $\{j\}$.

Cela donne $D_{20} = 0.832710\ldots$ et, avec (3.6), $b = 1.264713\cdots < a$ ce qui prouve que $P^+(g(n)) < 1.2654\sqrt{n\log n}$ pour $n \ge 10^6$. Le calcul de toutes les valeurs de $g(n)$ pour $4 \le n \le 1\,000\,000$ montre que le maximum est atteint une seule fois, en $n = 215$. □

Remarque 5.1. Pour $y = 4703.39$, l'algorithme 1 calcule α_k, β_k et γ_{k+1} pour $k \le 30$, mais trouve $\alpha_{31} < \alpha_{30}$ et retourne donc « ECHEC ». Les valeurs de D_k calculées par la formule (3.5) vérifient $D_{20} > D_{21} > \cdots > D_{30} = 0.822869\ldots$

Les valeurs de α_k, β_k, γ_{k+1} déterminées par l'algorithme 1 ne dépendent que de façon discrète de y. Par exemple, on obtient la même g–suite de longueur 21 pour tout y vérifiant $4692 \le y \le 4859$. Cependant D_k dépend de y. Notons aussi que α_k, β_k et γ_k sont rationnels, mais avec des numérateurs et dénominateurs croissant très vite avec k.

Dans la preuve du théorème de [7], les suites $\alpha_1, \ldots, \alpha_9$, $\beta_1, \ldots, \beta_9$ utilisées par J. Grantham sont très voisines de celles obtenues par l'algorithme 1 pour $y = 3329$.

Soit $y = 114\,620$. En calculant avec l'algorithme 1 la g–suite optimale y–admissible de de longueur 97, on trouve $\gamma_{98} = 0.9693673\ldots$, $D_{97} = 0.9549879\ldots$. Avec $n_0 = 540\,000\,000$ et $a = 1.1$, la formule (3.7) de la proposition 3.2 donne alors $b' = 1.0998903\ldots$ et

$$P^+(g(n)) \le 1.1\sqrt{n\log n}, \qquad n \ge 540\,000\,000. \tag{5.2}$$

6 La g–suite uniforme

L'étude théorique des g–suites optimales ne semble pas facile. Dans ce paragraphe nous introduisons les g–suites uniformes, moins efficaces pour les calculs numériques, mais plus simples à étudier.

Définition 6.1. *Soit $0 < \eta < 1$. On pose $\gamma_0 = 0$ et, pour $j \ge 1$, on définit $\gamma_j = \gamma_j(\eta)$ par*

$$\gamma_j = \frac{1 + \eta\gamma_{j-1}^2}{2}. \tag{6.1}$$

Remarque 6.1. Remarquons que $\gamma_j(\eta)$ est une fonction croissante de j et de η.

Lemme 6.1. *La suite $\gamma_j(\eta)$ définie ci-dessus est une g–suite infinie. On l'appelle la g–*suite uniforme de paramètre *η. Notons $\varepsilon = \varepsilon(\eta) = 1 - \eta$, et $L_\varepsilon = \lim_{j\to+\infty} \gamma_j$. Alors*

$$L_\varepsilon = \frac{1}{1+\sqrt{\varepsilon}} \qquad \textit{et, pour tout } j \ge 0, \qquad L_\varepsilon - \gamma_j \le L_\varepsilon(1-\sqrt{\varepsilon})^j. \tag{6.2}$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence. On a $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \dfrac{1+\eta\gamma_0^2}{2} = \dfrac{1}{2}$, puis

$$\gamma_{j+1} = \frac{1+\eta\gamma_j^2}{2} < \frac{1+\gamma_j^2}{2}.$$

En outre $\gamma_{j+1} = f(\gamma_j)$ avec $f = t \mapsto [1 + (1-\varepsilon)t^2]/2$. La fonction f est croissante pour $t \ge 0$ et admet deux points fixes qui sont $\dfrac{1}{1+\sqrt{\varepsilon}}$ et $\dfrac{1}{1-\sqrt{\varepsilon}}$.

Puisque $\gamma_0 < \gamma_1$ la suite (γ_j) est strictement croissante de limite $L_\varepsilon = \frac{1}{1+\sqrt{\varepsilon}}$. Les conditions figurant dans la définition 3.2 sont donc satisfaites et (γ_j) est une g–suite. De plus, puisque f' est croissante

$$\begin{aligned} L_\varepsilon - \gamma_j &= f(L_\varepsilon) - f(\gamma_{j-1}) < f'(L_\varepsilon)(L_\varepsilon - \gamma_{j-1}) = (1-\sqrt{\varepsilon})(L_\varepsilon - \gamma_{j-1}) \\ &\leq (1-\sqrt{\varepsilon})^j (L_\varepsilon - \gamma_0) = L_\varepsilon (1-\sqrt{\varepsilon})^j. \end{aligned}$$

□

Dans tout ce paragraphe η est un réel positif satisfaisant $0 < \eta < 1$, $\varepsilon = 1 - \eta$, (γ_j) est la g–suite uniforme de paramètre η, et $I_j = (\alpha_j, \beta_j]$, $J_j = (\gamma_j, \gamma_{j+1}]$ sont les intervalles associés à cette g–suite (cf. défintion 3.2).

Lemme 6.2. *Soit $u_j = L_\varepsilon - \gamma_j$. Alors $(\gamma_{j+1} - \gamma_j)$ est une suite décroissante, et, pour tout n on a*

$$\gamma_{j+1} - \gamma_j = \sqrt{\varepsilon} u_j + \frac{u_j^2}{2}(1-\varepsilon).$$

En particulier $\sqrt{\varepsilon}(L_\varepsilon - \gamma_j) < \gamma_{j+1} - \gamma_j$.

Démonstration. En effet, puisque $\gamma_j = L_\varepsilon - u_j = \frac{1}{1+\sqrt{\varepsilon}} - u_j$, on a

$$\begin{aligned} 2(\gamma_{j+1} - \gamma_j) &= 2f(\gamma_j) - 2\gamma_j = 1 + (1-\varepsilon)\gamma_j^2 - 2\gamma_j \\ &= 1 + (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{1+\sqrt{\varepsilon}} - u_j\right)^2 - \frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon}} + 2u_j \\ &= 2\sqrt{\varepsilon}u_j + (1-\varepsilon)u_j^2 > 2\sqrt{\varepsilon}u_j = 2\sqrt{\varepsilon}(L_\varepsilon - \gamma_j). \end{aligned}$$

□

Lemme 6.3. *Il n'existe pas de couple (k, j) tel que $(\gamma_j, \gamma_{j+1}] \subset (\alpha_k, \beta_k]$. Et donc chaque intervalle I_k rencontre au plus deux intervalles J_j.*

Démonstration. Supposons $(\gamma_j, \gamma_{j+1}] \subset (\alpha_k, \beta_k]$. Alors

$$\alpha_k \leq \gamma_j < \gamma_{j+1} \leq \beta_k = \gamma_k^2$$

et donc

$$L_\varepsilon - \gamma_j > L_\varepsilon - \gamma_k^2 > L_\varepsilon - L_\varepsilon^2 = L_\varepsilon(1 - L_\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}L_\varepsilon^2. \tag{6.3}$$

En utilisant le lemme 6.2, on a aussi

$$\sqrt{\varepsilon}(L_\varepsilon - \gamma_j) < \gamma_{j+1} - \gamma_j \leq \beta_k - \alpha_k = \varepsilon\beta_k = \varepsilon\gamma_k^2 < \varepsilon L_\varepsilon^2$$

qui implique $L_\varepsilon - \gamma_j < \sqrt{\varepsilon}L_\varepsilon^2$, ce qui contredit (6.3). □

Lemme 6.4. *Soit q un facteur premier de $g(n)$ et $\eta \leq \eta_3(q/4)$; la g–suite uniforme de paramètre η et $\big([\alpha_k,\, \beta_k)\,,[\gamma_k,\, \gamma_{k+1})\big)$ est q–admissible. Pour tout $k \geq 1$,*

$$q \leq \frac{\log g(n)}{\dfrac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} - k\dfrac{\log q}{q}}. \tag{6.4}$$

Démonstration. Par le lemme 6.3 chaque intervalle I_k rencontre au plus 2 des intervalles J_j. Le nombre m_k introduit dans la définition 3.3 vérifie donc $m_k \leq 2$ pour tout k. L'inégalité $\beta_1 = \dfrac{1}{4} \leq \beta_k$ et la croissance de η_3 donnent $\alpha_k \leq \beta_k\eta_3\big(\frac{q}{4}\big) \leq \beta_k\eta_3(q\beta_k)$. On a donc $q\alpha_k \leq q\beta_k\eta_3(q\beta_k)$, et par le lemme 2.3 l'intervalle qI_k contient au moins 3 nombres premiers. Ainsi, par la définion 3.3, la g–suite uniforme est q–admissible, la propostion 3.1 s'applique, ce qui termine la preuve. □

Lemme 6.5. *Soit n entier et q le plus grand facteur premier de $g(n)$. Lorsque n tend vers l'infini, on a*

$$q = P^+(g(n)) \leq \log g(n)(1 + O(\varepsilon)) \tag{6.5}$$

avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_2}$ où ε_1 et ε_2 sont définis par

$$\varepsilon_1 = \max_{x \geq \frac{q}{2}} \left|\frac{\theta(x)}{x} - 1\right| \qquad \varepsilon_2 = \max\left(1 - \eta_3\Big(\frac{q}{4}\Big), \Big(\frac{\log q}{\sqrt{q}}\Big)^2\right) < 1.$$

Démonstration. Soit

$$\eta = 1 - \varepsilon_2 \quad \text{ et } \quad k = \left\lfloor \frac{\log q}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right\rfloor. \tag{6.6}$$

Lorsque $n \to +\infty$, par (1.6), $q = P^+(g(n))$ tend aussi vers l'infini, ε_1, ε_2 et ε tendent vers 0 et k tend vers l'infini.

Puisque $\eta \leq \eta_3\left(\dfrac{q}{4}\right)$, le lemme 6.4 s'applique, et l'on a $q\gamma_{k+1} \geq q\gamma_1 = q/2$. Par définition de ε_1, il vient $\dfrac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q\gamma_{k+1}} \geq 1 - \varepsilon_1$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{\theta(\gamma_{k+1}q)}{q} &\geq \gamma_{k+1} - \gamma_{k+1}\varepsilon_1 \\ &\geq \gamma_{k+1} - \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon_1 - (1 - L_{\varepsilon_2}) - (L_{\varepsilon_2} - \gamma_{k+1}).\end{aligned} \tag{6.7}$$

Une première utilisation du lemme 6.1 donne

$$1 - L_{\varepsilon_2} = 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{\varepsilon_2}} \leq \sqrt{\varepsilon_2}. \tag{6.8}$$

Par (6.6), on a $k+1 > \dfrac{\log q}{\sqrt{\varepsilon_2}}$; une deuxième utilisation du lemme 6.1 donne

$$L_{\varepsilon_2} - \gamma_{k+1} \le (1-\sqrt{\varepsilon_2})^{k+1} \le (1-\sqrt{\varepsilon_2})^{\frac{\log q}{\sqrt{\varepsilon_2}}} \le \left(\frac{1}{e}\right)^{\log q} = \frac{1}{q}\cdot$$

Avec (6.7), (6.8) et la défintion de ε cela donne

$$\frac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} \ge 1 - \varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_2} - \frac{1}{q} = 1 - \varepsilon - \frac{1}{q}\cdot \tag{6.9}$$

La définition (6.6) de k donne $k\dfrac{\log q}{q} \le \dfrac{\log q}{\sqrt{\varepsilon_2}}\dfrac{\log q}{q}\cdot$ Avec (6.9), on en déduit

$$\frac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} - k\frac{\log q}{q} \ge 1 - \varepsilon - \frac{1}{q} - \frac{\log^2 q}{q\sqrt{\varepsilon_2}}\cdot$$

Par définition de ε_2, pour $q \ge 3$, on a $\dfrac{1}{q} \le \dfrac{\log^2 q}{q} \le \varepsilon_2 \le \sqrt{\varepsilon_2}$, ce qui donne

$$\frac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} - k\frac{\log q}{q} \ge 1 - \varepsilon - \frac{1}{q} - \sqrt{\varepsilon_2} \ge 1 - \varepsilon - 2\sqrt{\varepsilon_2} \ge 1 - 3\varepsilon$$

et termine la preuve avec (6.4). □

7 Majoration asymptotique de $P^+(g(n))$

Théorème 7.1. *Soit $P^+(g(n))$ le plus grand facteur premier de $g(n)$. Lorsque n tend vers l'infini, $P^+(g(n))$ est majoré par :*

1. *Sans aucune hypothèse, il existe $a > 0$ tel que*

$$P^+(g(n)) \le \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O\Big(\sqrt{n}e^{-a\sqrt{\log n}}\Big). \tag{7.1}$$

2. *Si l'hypothèse de Riemann est vraie*

$$P^+(g(n)) \le \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O\Big(n^{3/8}(\log n)^{7/8}\Big). \tag{7.2}$$

3. *Si l'hypothèse de Riemann et la conjecture de Cramér* (2.28) *sont vraies,*

$$P^+(g(n)) \le \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O\Big(n^{1/4}(\log n)^{9/4}\Big). \tag{7.3}$$

Démonstration. Soit $q = P^+(g(n))$. Par (1.6) on a

$$q \sim \sqrt{n\log n} \quad \text{et} \quad \log q \sim \frac{1}{2}\log n. \tag{7.4}$$

Nous utiliserons aussi l'équivalence

$$\mathrm{Li}^{-1}(n) \sim n \log n. \tag{7.5}$$

Nous allons appliquer le lemme 6.5 en évaluant dans les 3 cas les quantités ε_1, ε_2 et $\varepsilon = \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_2}$.

1. Par le théorème des nombres premiers, (2.19), il existe $a_1 > 0$ tel que

$$\varepsilon_1 = O\Big(\exp(-a_1 \sqrt{\log n})\Big).$$

Par la proposition 2.1, 1., on a

$$1 - \eta_3\left(\frac{q}{4}\right) = O\big(q^{-0.475}\big).$$

On a donc, par (7.4),

$$\sqrt{\varepsilon_2} = O\big(q^{-0.2375}\big) = O\big(n^{-0.11875}\big) \tag{7.6}$$

et $\varepsilon = \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_2} = O\big(\exp(-a_1\sqrt{\log n}\big)$. L'application du lemme 6.5 fournit ensuite l'inégalité

$$q \le (\log g(n))\Big(1 + O\Big(\exp(-a_1 \sqrt{\log n})\Big)\Big). \tag{7.7}$$

Par (1.15) il existe $a_2 > 0$ tel que

$$\log g(n) = \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} + O\Big(\sqrt{n} e^{-a_2\sqrt{\log n}}\Big)$$

ce qui, avec (7.7) et (7.5) démontre (7.1) pour $a < \min(a_1, a_2)$.

2. Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a par (2.20),

$$\varepsilon_1 = O\left(\frac{\log^2 q}{\sqrt{q}}\right) \tag{7.8}$$

et le point 3. de la proposition 2.1 donne

$$1 - \eta_3\left(\frac{q}{4}\right) = O\left(\frac{\log q}{\sqrt{q}}\right).$$

On obtient donc

$$\varepsilon_2 = O(\log q/\sqrt{q})$$

et, par (7.4)

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_2} = O\left(\frac{\sqrt{\log q}}{q^{1/4}}\right) = O\left(\frac{(\log n)^{3/8}}{n^{1/8}}\right)$$

puis, par le lemme 6.5,

$$q \le \log g(n) \left(1 + O\left(\frac{(\log n)^{3/8}}{n^{1/8}}\right)\right)$$

qui, avec (1.16) et (7.5) donne (7.2).

3. L'estimation (7.8) reste valable, tandis que (2.35) donne $\varepsilon_2 = O\left(\dfrac{\log^2 q}{q}\right)$ et donc

$$\varepsilon = O\left(\frac{\log^2 q}{\sqrt{q}}\right) = O\left(\frac{(\log n)^{7/4}}{n^{1/4}}\right),$$

qui, par le lemme 6.5, (1.16) et (7.5), prouve (7.3).
On notera que (7.3) reste valable si l'on remplace la conjecture de Cramér (2.28) par la conjecture plus faible $p_{i+1} - p_i = O\big(\log^4 p_i\big)$.

□

8 Majoration effective de $P^+(g(n))$

Théorème 8.1. *Pour $n \geq 2$ on a*

$$P^+(g(n)) \leq \log g(n)\left(1 + \frac{5.54}{\log n}\right) \leq \sqrt{n\log n}\left(1 + \frac{\log_2 n + 10.8}{2\log n}\right). \tag{8.1}$$

Démonstration. Pour $2 \leq n \leq 10^6$, on calcule $P^+(g(n))$ et $\log(g(n))$ par l'algorithme naïf de ([3], [17]) et on vérifie que les inégalités (8.1) sont satisfaites.
Soit $n \geq 10^6$. Supposons que l'on ait

$$q > \log g(n)\left(1 + \frac{5}{\log n}\right). \tag{8.2}$$

Puisque $n \geq 10^6 > 906$ il résulte de (1.12) que

$$q > \sqrt{n\log n}\left(1 + \frac{5}{\log n}\right) = \sqrt{n}\left(\sqrt{\log n} + \frac{5}{\sqrt{\log n}}\right).$$

Avec la croissance de $t \mapsto t + \dfrac{5}{t}$ pour $t \geq \sqrt{5}$ et $\sqrt{\log 10^6} \approx 3.7 > \sqrt{5}$, on en déduit $q > \sqrt{n}\left(\sqrt{\log 10^6} + \dfrac{5}{\sqrt{\log 10^6}}\right) > 5.062\sqrt{n} \geq 5\,062$. Le plus petit nombre premier $> 5\,062$ est $5\,077$. On a donc

$$q \geq 5\,077, \qquad 0.25\,q \geq 1269 \tag{8.3}$$

et

$$\log(0.25\,q) > \log(0.25 \times 5.062\sqrt{n}) > \log\sqrt{n}) \geq 0.5\log n. \tag{8.4}$$

Définissons η et ε par

$$\varepsilon = \frac{7.02}{\log^2 n} \quad \text{et} \quad \eta = 1 - \varepsilon. \tag{8.5}$$

De (8.5) on déduit d'une part

$$\frac{2.649}{\log n} \le \sqrt{\varepsilon} \le \frac{2.650}{\log n} \tag{8.6}$$

et, aussi, avec $n \ge 10^6$,

$$\varepsilon < 0.0368 \quad \text{et} \quad \eta = 1-\varepsilon > 0.9632. \tag{8.7}$$

La définiton (8.5) de ε, la minoration (8.4), la table 6 et enfin la minoration (8.3) avec la décroissance de δ_3 donnent

$$\varepsilon = \frac{7.02}{\log^2 n} \ge \frac{1.755}{(\log(0.25\,q))^2} \ge \frac{\delta_3(1\,269)}{(\log(0.25\,q))^2} \ge \frac{\delta_3(0.25\,q)}{(\log(0.25\,q))^2} \tag{8.8}$$

et donc, avec la majoration (2.39), (dans laquelle on pose $x = y = 0.25\,q$),

$$\eta = 1-\varepsilon \le 1 - \frac{\delta_3(0.25\,q)}{(\log(0.25\,q))^2} \le \eta_3\,(0.25\,q)\,.$$

La g–suite uniforme de paramètre η satisfait les hypothèses du lemme 6.4. On applique ce lemme en choisissant

$$k = \lfloor 0.64\,\log n \log_2 n \rfloor \ge \lfloor 0.64\,\log 10^6 \log_2 10^6 \rfloor = 23. \tag{8.9}$$

Nous avons remarqué au paragraphe 6 (remarque 6.1) que $\gamma_k = \gamma_k(\eta)$ est une fonction croissante de η et de k. Puisque, par (8.7), $\eta > 0.9632$ et $k \ge 23$ on a $\gamma_{k+1} \ge \gamma_{24}(0.9632) > 0.8378$. Par (8.3) et (8.4), on en déduit

$$q\gamma_{k+1} \ge 0.8378 \cdot 5\,077 \ge 4253 \quad \text{et} \quad \log q\gamma_{k+1} \ge \log 0.25\,q \ge 0.5 \log n$$

puis, par (2.16), et à l'aide de la table 2

$$\frac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q\gamma_{k+1}} \ge 1 - \frac{\theta_d(4253)}{(\log q\gamma_{k+1})^2} \ge 1 - \frac{1.863}{(\log q\gamma_{k+1})^2} \ge 1 - \frac{7.452}{(\log n)^2}\cdot \tag{8.10}$$

En utilisant $n \ge 10^6$, on en déduit

$$\frac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} \ge \left(1 - \frac{7.452}{\log^2 n}\right)\gamma_{k+1} \ge \left(1 - \frac{0.54}{\log n}\right)\gamma_{k+1}. \tag{8.11}$$

Minorons enfin γ_{k+1} : De (6.2), en utilisant (8.6) et (8.9), on déduit

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1} &\ge \frac{1}{1+\sqrt{\varepsilon}} - \left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)^{k+1} \ge 1 - \sqrt{\varepsilon} - \left(1 - \frac{2.649}{\log n}\right)^{k+1} \\
&\ge 1 - \sqrt{\varepsilon} - \left(1 - \frac{2.649}{\log n}\right)^{0.64\,\log_2 n \log n} \\
&\ge 1 - \sqrt{\varepsilon} - \left[\left(1 - \frac{2.649}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{2.649}}\right]^{0.64\,\times 2.649\,\log_2(n)} \\
&\ge 1 - \frac{2.65}{\log n} - \frac{1}{(\log n)^{0.64\times 2.649}} \ge 1 - \frac{2.812}{\log n}\cdot
\end{aligned}$$

Avec (8.11) cela donne

$$\frac{\theta(q\gamma_{k+1})}{q} \geq \left(1 - \frac{0.54}{\log n}\right)\left(1 - \frac{2.812}{\log n}\right) \geq 1 - \frac{3.352}{\log n} + \frac{1.518}{\log^2 n}\cdot \tag{8.12}$$

Puisque $\dfrac{\log t}{t}$ est une fonction décroissante de t pour $t \geq e$, et $q \geq \sqrt{n \log n}$, on a

$$\frac{\log q}{q} \leq \frac{1}{2}\frac{\log(n\log n)}{\sqrt{n \log n}}\cdot$$

En utilisant (8.9) et la décroissance de $t \mapsto (\log t)^{3/2}\log_2 t \log(t\log t)/\sqrt{t}$, pour $t \geq 10^6$, on en déduit

$$k\frac{\log q}{q} \leq 0.32 \log n \log_2 n \frac{\log(n\log n)}{\sqrt{n\log n}} \leq \frac{0.71}{\log n}\cdot \tag{8.13}$$

Avec la formule (6.4) du lemme 6.4, (8.12) et (8.13) donnent

$$q \leq \frac{\log g(n)}{1 - \dfrac{4.062}{\log n} + \dfrac{1.518}{\log^2 n}}\cdot$$

Or, sur l'intervalle $0 \leq X \leq 1/\log 10^6$, la fraction $\dfrac{4.062 - 1.518X}{1 - 4.062X + 1.518X^2}$ est croissante et majorée par 5.54. On en déduit, pour $n \geq 10^6$,

$$\frac{1}{1 - \dfrac{4.062}{\log n} + \dfrac{1.518}{\log^2 n}} = 1 + \frac{\dfrac{4.062}{\log n} - \dfrac{1.518}{\log^2 n}}{1 - \dfrac{4.062}{\log n} + \dfrac{1.518}{\log^2 n}} \leq 1 + \frac{5.54}{\log n}$$

ce qui, avec (8.2) prouve la première inégalité de (8.1). En appliquant (1.13), on en déduit

$$\begin{aligned}
q &\leq \sqrt{n\log n}\left(1 + \frac{\log_2 n - 0.975}{2\log n}\right)\left(1 + \frac{5.54}{\log n}\right)\\
&\leq \sqrt{n\log n}\left(1 + \frac{\log_2 n + 10.11}{2\log n} + \frac{5.54}{\log n}\frac{\log_2 n - 0.975}{2\log n}\right)\\
&\leq \sqrt{n\log n}\left(1 + \frac{\log_2 n + 10.11}{2\log n} + \frac{1}{2\log n}\frac{5.54(\log_2 10^6 - 0.975)}{\log 10^6}\right)
\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve de (8.1). □

9 Minoration de $P^+(g(n))$

Lemme 9.1. *Soit $n \geq 2$, $\alpha \geq 2$ et λ premier tel que λ^α divise $g(n)$. Soit q le nombre premier suivant $P^+(g(n))$. On a*

$$\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha-1} < q, \tag{9.1}$$

$$\lambda < q^{1/\alpha} + 1\cdot \tag{9.2}$$

et

$$\alpha < \frac{\log(2q)}{\log 2}\cdot \tag{9.3}$$

Démonstration. (9.1) et (9.2) constituent la propriété 5 de [16], dont la preuve est facile. De (9.1) on déduit

$$\lambda^\alpha < \frac{q}{1-\frac{1}{\lambda}} \leq 2q$$

ce qui implique $\alpha < \log(2q)/\log(\lambda) \leq \log(2q)/\log(2)$ et prouve (9.3). □

Lemme 9.2. *Soit θ la fonction de Chebyshev définie en* (1.10)*. Pour tout $n \geq 2$ on a la majoration*

$$\log g(n) \leq \theta\left(P^+(g(n))\right) + S(q) \tag{9.4}$$

où q est le nombre premier suivant $P^+(g(n))$ et

$$S(q) = \sum_{\alpha=2}^{\log(2q)/\log 2} \theta(q^{1/\alpha}+1). \tag{9.5}$$

Démonstration. En désignant par λ un nombre premier générique et en appliquant le lemme 9.1 il vient

$$\begin{aligned} \log g(n) &\leq \sum_{\lambda \leq P^+(g(n))} \log\lambda + \sum_{\alpha\geq 2}\sum_{\lambda^\alpha | g(n)} \log\lambda && (9.6)\\ &\leq \theta\Big(P^+(g(n))\Big) + \sum_{\alpha=2}^{\log(2q)/\log 2} \sum_{\lambda \leq q^{1/\alpha}+1} \log\lambda && (9.7)\\ &= \theta\Big(P^+(g(n))\Big) + S(q). && (9.8) \end{aligned}$$

□

Lemme 9.3. *Soit $q \geq 3$ un nombre premier, p le nombre premier précédant q et $S(q)$ la somme définie par* (9.5)*. On a*

$$S(q) < 2.13\sqrt{p}. \tag{9.9}$$

Démonstration. Supposons d'abord $q \geq q_0 = 100\,000$. Il résulte de la définition de η_1 (cf. Définition (2.2)) et de la table 3 que

$$\frac{p}{q} \geq \eta_1(q_0) = \frac{107\,377}{107\,441} \geq 0.9994. \tag{9.10}$$

En posant $k = \left\lfloor \dfrac{\log(2q)}{\log 2} \right\rfloor$, en utilisant l'inégalité (2.2) et en remarquant que $t \mapsto \dfrac{\log t}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \dfrac{\log(t/4)}{t^{1/4}}$ sont décroissantes pour $t \geq e^2 \approx 7.39$ et $t \geq 4e^4 \approx 218.4$ respectivement, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{S(q)}{\sqrt{p}} &\leq 1.000028\,\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \sum_{\alpha=2}^{k} \frac{q^{1/\alpha}+1}{\sqrt{q}} \\
&\leq \frac{1.000028}{\sqrt{\eta_1(q_0)}} \left(\frac{k-1}{\sqrt{q}} + 1 + \frac{1}{q^{1/6}} + \frac{k-3}{q^{1/4}} \right) \\
&\leq \frac{1.000028}{\sqrt{\eta_1(q_0)}} \left(\frac{\log q}{\sqrt{q}\log 2} + 1 + \frac{1}{q^{1/6}} + \frac{\log(0.25\,q)}{q^{1/4}\log 2} \right) \\
&\leq \frac{1.000028}{\sqrt{\eta_1(q_0)}} \left(\frac{\log q_0}{\sqrt{q_0}\log 2} + 1 + \frac{1}{q_0^{1/6}} + \frac{\log(q_0/4)}{q_0^{1/4}\log 2} \right) = 2.0215\ldots,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (9.9) pour $q \geq 100\,000$. Ensuite on calcule $S(q)/\sqrt{p}$ pour tous les q premiers, $3 \leq q \leq 100\,000$, et l'on trouve que le maximum est atteint pour $q = 17$ et vaut $\dfrac{\log 2160}{\sqrt{13}} = 2.129\ldots$ □

Lemme 9.4. *Pour tout* $n \geq 906$ *on a*

$$P^+(g(n)) \geq \frac{\sqrt{n\log n}}{1.000028} - 2.4\,(n\log n)^{1/4}. \tag{9.11}$$

Démonstration. Par (9.4) et (9.9) il vient, en posant $P = P^+(g(n))$

$$\log g(n) \leq \theta(P) + 2.13\sqrt{P}.$$

Or, vu (1.12), pour $n \geq 906$, $\log g(n) \geq \sqrt{n\log n}$ et l'on a la majoration (5.1). Avec l'inégalité (2.2) cela entraine

$$\sqrt{n\log n} \leq \theta(P) + 2.13\sqrt{P} \leq 1.000028P + 2.13 \times \sqrt{1.266}(n\log n)^{1/4},$$

d'où(9.11). □

Théorème 9.1. *Pour tout* $n \geq 133$ *on a*

$$P^+(g(n)) \geq \sqrt{n\log n}\left(1 + \frac{\log_2 n - 2.27}{2\log n}\right) \tag{9.12}$$

et, pour tout $n \geq 1755$ *on a*

$$P^+(g(n)) \geq \sqrt{n\log n}. \tag{9.13}$$

Démonstration. Par l'algorithme naïf exposé dans [3, 17] on calcule d'abord $g(n)$ et $P^+(g(n))$ pour $n \leq 10^6$ et l'on s'assure que l'inégalité (9.12) est vraie pour $133 \leq n \leq 10^6$, mais fausse pour $n = 132$, puis que (9.13) est vraie pour $1755 \leq n \leq 10^6$ et fausse pour $n = 1754$.

Notons que pour $n \geq 10^6$ la minoration (9.13) résulte de (9.12), puisque $\log\log 10^6 \geq 2.27$. Il nous reste donc à prouver que (9.12) est vraie pour $n > 10^6$.

Supposons d'abord $n_0 = 10^6 < n \leq n_1 = 7.9 \times 10^{21}$, de sorte que, par (5.1), on ait

$$P = P^+(g(n)) \leq 1.266\sqrt{n_1 \log n_1} \leq 8 \times 10^{11}$$

d'où l'on déduit $\theta(P) < P$ avec (2.1).

En utilisant la minoration (1.14) de $\log g(n)$, il vient par (9.4) et (9.9)

$$\sqrt{n \log n}\left(1 + \frac{\log_2 n - 1.18}{2\log n}\right) \leq \log g(n) < P + 2.13\sqrt{P}$$

et, par la majoration (5.1),

$$P > \sqrt{n \log n}\left(1 + \frac{\log_2 n - 1.18}{2\log n} - \frac{2.4}{(n\log n)^{1/4}}\right).$$

Mais la fonction $t \mapsto (\log t)^{3/4} t^{-1/4}$ est décroissante pour $t \geq n_0 = 10^6$, ce qui implique

$$\frac{2.4}{(n\log n)^{1/4}} = \frac{4.8}{2\log n}\frac{(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}} \leq \frac{4.8}{2\log n}\frac{(\log n_0)^{3/4}}{n_0^{1/4}} \leq \frac{1.09}{2\log n}$$

et prouve (9.12) lorsque $n_0 < n \leq n_1$.

Supposons maintenant $n > n_1 = 7.9\ 10^{21}$. Par (9.11), $P = P^+(g(n))$ vérifie

$$P > 6.3 \times 10^{11}$$

et, par (2.4),

$$\theta(P) - P \leq 0.2\frac{P}{\log^2 P} < \frac{0.2}{\log(6.3 \times 10^{11})}\frac{P}{\log P} < 0.008\frac{P}{\log P}.$$

Par (9.4), (9.9) et la minoration (1.14), il vient

$$\sqrt{n \log n}\left(1 + \frac{\log_2 n - 1.18}{2\log n}\right) < P + 0.008\frac{P}{\log P} + 2.13\sqrt{P}. \tag{9.14}$$

Mais, par la majoration (5.1), on a

$$\frac{P}{\log P} < \frac{1.266\sqrt{n\log n}}{\frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log_2 n + \log 1.266} < \frac{1.266\sqrt{n\log n}}{\frac{1}{2}\log n} = 5.064\frac{\sqrt{n\log n}}{2\log n}$$

et

$$\sqrt{P} < \sqrt{1.266}(n\log n)^{1/4} = \frac{\sqrt{1.266}\sqrt{n\log n}}{2\log n}\left(\frac{2(\log n)^{3/4}}{n^{1/4}}\right)$$
$$< \frac{\sqrt{n\log n}}{2\log n}\left(2\sqrt{1.266}\frac{(\log n_1)^{3/4}}{n_1^{1/4}}\right) < 0.00015\frac{\sqrt{n\log n}}{2\log n}\cdot$$

En observant que $0.008 \times 5.064 + 2.13 \times 0.00015 < 0.05$, on déduit de (9.14) que, pour $n \geq 7.9 \times 10^{21}$, on a

$$P = P^+(g(n)) > \sqrt{n\log n}\left(1 + \frac{\log_2 n - 1.23}{2\log n}\right),$$

ce qui termine la preuve du théorème 9.1. □

Théorème 9.2. *1. Il existe deux constantes positives C et a telles que, pour tout $n \geq 2$,*

$$P^+(g(n)) \geq \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} - C\sqrt{n}\exp(-a\sqrt{\log n}). \tag{9.15}$$

2. Si la borne supérieure Θ des parties réelles des zéros de la fonction ζ de Riemann est plus petite que 1, il existe une constante C' telle que

$$P^+(g(n)) \geq \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} - C'n^{\Theta/2}(\log n)^{2+\Theta/2}. \tag{9.16}$$

Démonstration. 1. Par (9.4) et (9.9), $P = P^+(g(n))$ satisfait

$$\log g(n) \leq \theta(P) + 2.13\sqrt{P}. \tag{9.17}$$

Mais, par (1.15), il existe deux constantes positives C_1 et a_1 telles que, pour $n \geq 2$,

$$\log g(n) \geq \sqrt{Li^{-1}(n)} - C_1\sqrt{n}\exp(-a_1\sqrt{\log n}). \tag{9.18}$$

Par (2.19), il existe deux constantes positives C_2 et a_2 telles que pour tout $x > 1$ on ait

$$\theta(x) \leq x + C_2 x\exp(-a_2\sqrt{\log x}), \tag{9.19}$$

ce qui, par la majoration (5.1) entraine :

$$\theta(P) + 2.13\sqrt{P} \leq P + C_3\sqrt{n}\exp(-a_3\sqrt{\log n}) \tag{9.20}$$

avec $C_3 > 0$ et $a_3 > 0$.
Les inégalités (9.17), (9.18) et (9.20) donnent ensuite

$$P \geq \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} - C_1\sqrt{n}\exp(-a_1\sqrt{\log n}) - C_3\sqrt{n}\exp(-a_3\sqrt{\log n})$$

ce qui prouve (9.15) avec $a = \min(a_1, a_3)$ et $C = C_1 + C_3$.

2. La preuve est similaire en remplaçant les inégalités (9.18), (9.19) et (9.20) par

$$\begin{aligned} \log g(n) &\geq \sqrt{\mathrm{Li}^{-1}(n)} - C_1'(n \log n)^{\Theta/2}, \qquad \text{(cf. (1.16))} \\ \theta(x) &\leq x + C_2' x^{\Theta} \log^2 x \qquad \text{(cf. (2.20))} \end{aligned}$$

et

$$\theta(P) + 2.13\sqrt{P} \leq P + C_3'(n \log n)^{\Theta/2} \log^2 n.$$

□

10 Comparaison de $P^+(g(n)$ et de $\log g(n)$

Soit $\mathcal{N}(x)$ le nombre de n, $2 \leq n \leq x$, tels que $P^+(g(n)) > \log g(n)$. La table des valeurs de $\mathcal{N}(x)$

$x =$	10^3	10^4	10^5	10^6
$\mathcal{N}(x) =$	972	9 787	99 424	996 727

montre que, pour $n \leq 10^6$, $P^+(g(n))$ a une forte tendance à excéder $\log g(n)$. Cependant nous allons prouver

Théorème 10.1. *Il existe une infinité de valeurs de n telles que $P^+(g(n)) > \log g(n)$ et une infinité de valeurs de n telles que $P^+(g(n)) < \log g(n)$.*

La démonstration du théorème 10.1 repose sur la notion de nombre ℓ–superchampion et sur les oscillations des fonctions θ et ψ de Chebyshev (cf. le lemme 10.1 ci-dessous). A partir de la fonction additive ℓ (définie en (1.2)), les nombres ℓ–superchampions sont construits à l'image des nombres hautement composés supérieurs, introduits par Ramanujan à partir de la fonction « nombre de diviseurs ». Ces nombres ℓ–superchampions ont étés utilisés dans les articles [16, 18, 19, 11, 12, 13, 21].

Définition 10.1. *Soit $P \geq 5$ un nombre premier et*

$$\rho = \frac{P}{\log P}. \qquad (10.1)$$

Pour tout nombre premier p on définit

$$\alpha_p = \begin{cases} 0 & si \quad p > P \\ 1 & si \quad p \leq P \ \ et \ \rho < \dfrac{p^2 - p}{\log p} \\ i \geq 2 & si \quad \dfrac{p^i - p^{i-1}}{\log p} \leq \rho < \dfrac{p^{i+1} - p^i}{\log p}. \end{cases} \qquad (10.2)$$

Le nombre ℓ–superchampion N_P est défini par

$$N_P = \prod_p p^{\alpha_p} = \prod_{p \le P} p^{\alpha_p} \tag{10.3}$$

et l'on a

$$n_P = \ell(N_P) = \sum_{p \le P} p^{\alpha_p}. \tag{10.4}$$

On notera que α_p est défini de façon à minimiser la suite $\beta \mapsto \ell(p^\beta) - \rho\beta \log p$. On a donc pour tout β entier, $\beta \ge 0$,

$$\ell(p^\beta) - \rho\beta\log p \ge \ell(p^{\alpha_p}) - \rho\alpha_p \log p$$

ce qui, par l'additivité des fonctions ℓ et log entraine que, pour tout $M = \prod_p p^{\beta_p}$, on a

$$\ell(M) - \rho\log M \ge \ell(N_P) - \rho\log N_P. \tag{10.5}$$

Proposition 10.1. *Pour tout P premier, $P \ge 5$, on a*

$$g(n_P) = N_P \tag{10.6}$$

et

$$\theta(P) \le \log N_P = \log g(n_P) \le \psi(P) \tag{10.7}$$

où θ et ψ sont les fonctions de Chebyshev définies en (1.10).

Démonstration. Soit M un entier tel que $\ell(M) \le \ell(N_P) = n_P$. Par (10.5), il vient

$$\rho\log\frac{M}{N_P} \le \ell(M) - \ell(N_P) \le 0$$

d'où $M \le N_P$ ce qui entraine (10.6) par définition de g. La minoration dans (10.7) résulte de (10.2) et (10.3). Pour prouver la majoration, il faut montrer que, pour $i \ge 2$,

$$\frac{p^i - p^{i-1}}{\log p} \le \rho = \frac{P}{\log P} \implies p^i \le P. \tag{10.8}$$

Comme la fonction $f(t) = \dfrac{t^i - t^{i-1}}{\log t}$ est croissante pour tout $i \ge 2$, pour prouver (10.8), il suffit de montrer

$$f(P^{1/i}) > \frac{P}{\log P}.$$

On a

$$\frac{f(P^{1/i})}{P/\log P} = i\left(1 - \frac{1}{P^{1/i}}\right) \ge i\left(1 - \frac{1}{5^{1/i}}\right).$$

Mais $2(1-\frac{1}{\sqrt{5}}) > 1$ et pour $i \geq 3$, on a $5^{1/i} = \exp \dfrac{\log 5}{i} > 1 + \dfrac{\log 5}{i}$ et

$$i\left(1-\frac{1}{5^{1/i}}\right) > i\left(1-\frac{1}{1+(\log 5)/i}\right) = \frac{i\log 5}{i+\log 5} \geq \frac{3\log 5}{3+\log 5} > 1,$$

ce qui achève la démonstration de (10.7). □

Nous aurons aussi besoin du lemme ci-dessous, conséquence du théorème de Littlewood sur les oscillations des fonctions θ et ψ.

Lemme 10.1.

– *Il existe une infinité de nombres premiers P tels que*

$$\theta(P) \leq \psi(P) < P. \tag{10.9}$$

– *Il existe une infinité de nombres premiers P tels que*

$$P < \theta(P) \leq \psi(P). \tag{10.10}$$

Démonstration. Par le théorème de Littlewood (cf. [10], [8] Th. 34, [6] Th. 6.3) il existe une suite de valeurs de x tendant vers l'infini et une constante $c > 0$ telles que

$$\theta(x) \leq \psi(x) \leq x - c\sqrt{x}\log_3 x \tag{10.11}$$

et il existe une suite de valeurs de x' tendant vers l'infini et une constante $c' > 0$ telles que

$$x' + c'\sqrt{x}'\log_3 x' \leq \theta(x') \leq \psi(x'). \tag{10.12}$$

Supposons d'abord x assez grand vérifiant (10.11). Si x est un nombre premier, (10.11) implique (10.9) ; sinon soit P le nombre premier suivant x. On a, par (10.11) et la croissance de $t \mapsto t - c\sqrt{t}\log_3 t$,

$$\theta(P) =$$
$$\theta(x) + \log P \leq x - c\sqrt{x}\log_3 x + \log P < P - c\sqrt{P}\log_3 P + \log P$$

et, par (2.5),

$$\psi(P) \leq \theta(P) + 2\sqrt{P} < P - c\sqrt{P}\log_3 P + +2\sqrt{P} + \log P$$

qui implique (10.9) lorsque x est assez grand. □

La preuve de (10.10) est plus facile : soit x' vérifiant (10.12) et P le plus grand nombre premier satisfaisant $P \leq x'$. On a

$$\theta(P) = \theta(x') \geq x' + c'\sqrt{x'}\log_3 x' > P. \qquad \square$$

Démonstration du théorème 10.1 On considère la suite des nombres n_P définis par (10.4). Par (10.6), on a $g(n_P) = N_P$ et, par (10.3), on a $P^+(g(n_P)) = P$. On applique alors (10.7) et le lemme 10.1. Notons que la démonstration prouve en fait

$$P^+(g(n)) - \log g(n) = \Omega_\pm\left(n^{1/4}(\log n)^{1/4}\log_3 n\right). \qquad \square \tag{10.13}$$

TAB. 1 – Les valeurs de $\theta_{\min}(p)$ pour les premiers $\theta_{\min}$–champions p, arrondies par défaut. Soit $p < q$ deux champions consécutifs. La fonction $\theta_{\min}$ est constante sur l'intervalle $[p, q)$ de valeur $\theta_{\min}(p) = \dfrac{\theta(^\star q)}{q}$ en notant $^\star q$ le nombre premier précédant q. Pour $x \geq p$, on a $\dfrac{\theta(x)}{x} \geq \theta_{\min}(p)$.

p	$\theta_{\min}(p)$	p	$\theta_{\min}(p)$	p	$\theta_{\min}(p)$	p	$\theta_{\min}(p)$
2	0.2310	127	0.8499	593	0.9291	1987	0.9618
3	0.3583	149	0.8694	599	0.9367	1993	0.9629
5	0.4858	163	0.8695	601	0.9380	2237	0.9632
7	0.4861	223	0.8780	607	0.9383	2657	0.9654
11	0.5957	227	0.8940	809	0.9409	2659	0.9669
13	0.6064	229	0.8980	821	0.9449	3299	0.9688
17	0.6628	347	0.9096	853	0.9455	3301	0.9695
29	0.7033	349	0.9130	1423	0.9480	3307	0.9696
37	0.7228	367	0.9134	1427	0.9517	3449	0.9697
41	0.7615	419	0.9160	1429	0.9541	3457	0.9709
59	0.7928	431	0.9194	1433	0.9550	3461	0.9710
67	0.8073	557	0.9208	1447	0.9573	3511	0.9713
71	0.8160	563	0.9222	1451	0.9576	3527	0.9730
97	0.8289	569	0.9264	1481	0.9600	3529	0.9742
101	0.8430	587	0.9278	1973	0.9609	3533	0.9747

TAB. 2 – Les premiers θ_d–champions p et les valeurs $\theta_d(p)$, arrondies par excès. Si p et q sont deux champions consécutifs, on a $\theta_d(p) = \left(1 - \dfrac{\theta(^\star q)}{q}\right) \log^2 q$ en notant $^\star q$ le nombre premier précédant q. Pour $p \leq x < q$ on a $\theta_d(x) = \theta_d(p)$ et, pour $x \neq 1$, $1 - \dfrac{\theta_d(p)}{\log^2(x)} \leq \dfrac{\theta(x)}{x} \leq 1$.

p	$\theta_d(p)$	p	$\theta_d(p)$	p	$\theta_d(p)$	p	$\theta_d(p)$
1	3.964809	1973	2.287253	7481	1.582806	19427	1.152039
59	3.850387	2657	2.168328	7487	1.556462	19681	1.132553
97	3.813284	3299	2.046009	11777	1.501244	19697	1.114653
223	3.588327	3301	2.015399	11779	1.460762	19913	1.109461
227	3.488612	3449	2.009078	11783	1.453427	20873	1.093478
347	3.220904	3457	1.927729	11801	1.427708	31957	1.093040
557	3.174406	3461	1.927471	11807	1.402006	32051	1.078184
563	3.127884	3511	1.914641	11813	1.391140	32057	1.050007
569	2.989177	3527	1.862808	11897	1.372839	32059	1.041410
587	2.942596	5381	1.825717	11923	1.362143	32297	1.013380
593	2.896013	5387	1.788674	14387	1.356310	32299	0.991977
599	2.868691	5393	1.751679	19373	1.336505	32303	0.982304
1423	2.742321	5399	1.741574	19379	1.296811	32321	0.954291
1427	2.545152	5407	1.704658	19381	1.277369	32323	0.949739
1429	2.419671	5413	1.680383	19417	1.247671	32353	0.934985
1433	2.382941	7451	1.667866	19421	1.208042	32359	0.913616
1447	2.297149	7477	1.614849	19423	1.178361	32363	0.898870

Tab. 3 – Les premiers champions de η_1. Si p et q sont deux champions consécutifs et $p \leq x < q$, on a $\eta_1(x) = \eta_1(p)$. Si p est un champion, pour $x \geq p$ on a $\eta_1(x) \geq \eta_1(p)$ et $(\eta_1(p)x,\, x]$ contient au moins un nombre premier.

p	$\eta_1(p)$	p	$\eta_1(p)$	p	$\eta_1(p)$
2	3/5	2203	2477/2503	15727	19609/19661
5	7/11	2503	2971/2999	19661	31397/31469
11	13/17	2999	3271/3299	31469	34061/34123
17	23/29	3299	4297/4327	34123	35617/35671
29	31/37	4327	4831/4861	35671	35677/35729
37	47/53	4861	5591/5623	35729	43331/43391
53	113/127	5623	5749/5779	43391	44293/44351
127	139/149	5779	5953/5981	44351	45893/45943
149	199/211	5981	6491/6521	45943	48679/48731
211	211/223	6521	6917/6947	48731	58831/58889
223	293/307	6947	7253/7283	58889	59281/59333
307	317/331	7283	8467/8501	59333	60539/60589
331	523/541	8501	9551/9587	60589	79699/79757
541	1327/1361	9587	9973/10007	79757	89689/89753
1361	1669/1693	10007	10799/10831	89753	107377/107441
1693	1951/1973	10831	11743/11777	107441	155921/156007
1973	2179/2203	11777	15683/15727	156007	188029/188107

Tab. 4 – Les premiers champions de η_2. Si p et q sont deux champions consécutifs et $p \leq x < q$, on a $\eta_2(x) = \eta_2(p)$. Si p est un champion, pour $x \geq p$ on a $\eta_2(x) \geq \eta_2(p)$ et $(\eta_2(p)x,\, x]$ contient au moins 2 nombres premiers.

p	$\eta_2(p)$	p	$\eta_2(p)$	p	$\eta_2(p)$
3	2/5	547	619/641	7297	7963/8009
5	3/7	641	773/797	8009	8467/8513
7	5/11	797	1321/1361	8513	9551/9601
11	7/13	1361	1327/1367	9601	9967/10007
13	11/17	1367	1381/1409	10007	11003/11047
17	19/29	1409	2161/2203	11047	14087/14143
29	23/31	2203	2477/2521	14143	19609/19681
31	31/41	2521	3121/3163	19681	24251/24317
41	47/59	3163	3259/3299	24317	25471/25537
59	83/97	3299	3947/3989	25537	31397/31477
97	109/127	3989	4159/4201	31477	38461/38543
127	113/131	4201	4297/4337	38543	58789/58889
131	199/223	4337	4817/4861	58889	58831/58897
223	283/307	4861	5591/5639	58897	62233/62297
307	317/337	5639	5939/5981	62297	69557/69623
337	331/347	5981	6481/6521	69623	74941/75011
347	523/547	6521	7253/7297	75011	79699/79769

TAB. 5 – Les premiers champions de η_3. Si p et q sont deux champions consécutifs et $p \leq x < q$, on a $\eta_3(x) = \eta_3(p)$. Si p est un champion, pour $x \geq p$ on a $\eta_3(x) \geq \eta_3(p)$ et $(\eta_3(p)x,\, x]$ contient au moins 3 nombres premiers.

p	$\eta_3(p)$	p	$\eta_3(p)$	p	$\eta_3(p)$
5	3/11	311	317/347	6007	6491/6547
11	5/13	347	523/557	6547	7351/7411
13	7/17	557	773/809	7411	7759/7817
17	13/23	809	887/919	7817	7951/8009
23	17/29	919	1321/1367	8009	9551/9613
29	19/31	1367	1327/1373	9613	9973/10037
31	23/37	1373	1381/1423	10037	10369/10427
37	29/41	1423	2153/2203	10427	11177/11239
41	31/43	2203	2477/2531	11239	11719/11777
43	43/59	2531	2551/2591	11777	12829/12889
59	47/61	2591	3121/3167	12889	13933/13997
61	53/67	3167	3947/4001	13997	14087/14149
67	79/97	4001	4159/4211	14149	14563/14621
97	83/101	4211	4817/4871	14621	19603/19681
101	113/137	4871	5581/5639	19681	19609/19687
137	199/227	5639	5927/5981	19687	24251/24329
227	283/311	5981	5953/6007	24329	35617/35729

TAB. 6 – Les premiers δ_3–champions p et les valeurs $\delta_3(p)$, arrondies par excès : Soit p et q deux champions consécutifs. On a $\delta_3(p) = (1-\eta_3(^\star q))\log^2 q$ en notant $^\star q$ le nombre premier précédant q. Pour $p \leq x < q$ on a $\delta_3(x) = \delta_3(p)$ et, pour $x \geq p$, $1 - \dfrac{\delta_3(p)}{\log^2 x} \leq \eta_3(x) \leq 1$.

p	$\delta_3(p)$	p	$\delta_3(p)$	p	$\delta_3(p)$
5	4.9336	2531	0.9538	9613	0.5414
37	4.5089	2591	0.9438	10037	0.4800
59	4.2406	3167	0.9286	11239	0.4328
137	3.6302	4001	0.8601	11777	0.4170
227	2.9662	4211	0.7993	12889	0.4168
311	2.9581	4871	0.7674	13997	0.4003
347	2.4402	5639	0.6828	14149	0.3875
557	1.9951	5981	0.6806	19681	0.3874
809	1.7544	6007	0.6604	19687	0.3446
1367	1.7488	6547	0.6429	35729	0.2777
1373	1.5559	7411	0.5963	38557	0.2292
1423	1.3449	7817	0.5851	43889	0.2213
2203	1.3102	8009	0.5425	58897	0.1714

Références

[1] R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz. The difference between consecutive primes. II. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 83(3) :532–562, 2001.

[2] H. Cramér. On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. *Acta Arith.*, 2 :23–46, 1936.

[3] M. Deléglise, J.-L. Nicolas, and P. Zimmermann. Landau's function for one million billions. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 20(3) :625–671, 2008.

[4] P. Dusart. Estimates of some functions over primes without r. h., to be published. cf. `http://arxiv.org/abs/1002.0442v1`, 2010.

[5] P. Dusart. The kth prime is greater than $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ for $k \geq 2$. *Math. Comp.*, 68(225) :411–415, 1999.

[6] W. J. Ellison. *Les nombres premiers*. Hermann, Paris, 1975. En collaboration avec M. Mendès France, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.

[7] J. Grantham. The largest prime dividing the maximal order of an element of S_n. *Math. Comp.*, 64(209) :407–410, 1995.

[8] A. E. Ingham. *The distribution of prime numbers*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Reprint of the 1932 original, With a foreword by R. C. Vaughan.

[9] E. Landau. *Über die Maximalordnung der Permutationen gegebenen Grades*. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I, 2nd ed., 1953. Archiv. der Math. und Phys., Sér 3, 5 (1903), 92-103.

[10] J. E. Littlewood. Sur la distribution des nombres premeirs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 158 :1869–1872, 1914.

[11] J.-P. Massias. Majoration explicite de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)*, 6(3-4) :269–281 (1985), 1984.

[12] J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, and G. Robin. Évaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique. *Acta Arith.*, 50(3) :221–242, 1988.

[13] J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, and G. Robin. Effective bounds for the maximal order of an element in the symmetric group. *Math. Comp.*, 53(188) :665–678, 1989.

[14] W. Miller. The maximum order of an element of a finite symmetric group. *Amer. Math. Monthly*, 94(6) :497–506, 1987.

[15] T. R. Nicely. New maximal prime gaps and first occurrences. *Math. Comp.*, 68(227) :1311–1315, 1999. See also `http://www.trnicely.net/gaps/gaplist.html`.

[16] J.-L. Nicolas. Sur l'ordre maximum d'un élément dans le groupe S_n des permutations. *Acta Arith*, 14 :315–332, 1967/1968.

[17] J.-L. Nicolas. Calcul de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique S_n. *Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelle*, 3(Ser. R-2) :43–50, 1969.

[18] J.-L. Nicolas. Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et "highly composite numbers". *Bull. Soc. Math. France*, 97 :129–191, 1969.

[19] J.-L. Nicolas. Ordre maximal d'un élément d'un groupe de permutations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 270 :A1473–A1476, 1970.

[20] J.-L. Nicolas. On highly composite numbers. In *Ramanujan revisited*, pages 216–244. Edited by G.E. Andrews, R. A. Askey, B. C. Berndt, K. G. Ramanathan, R. A. Rankin, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[21] J.-L. Nicolas. On Landau's function $g(n)$. In *The mathematics of Paul Erdős, I*, volume 13 of *Algorithms Combin.*, pages 228–240. Springer, Berlin, 1997.

[22] S. Ramanujan. Highly composite numbers. *Ramanujan J.*, 1(2) :119–153, 1997. Annotated and with a foreword by J.-L. Nicolas and G. Robin.

[23] S. Ramanujan. Highly composite numbers [Proc. London Math. Soc. (2) **14** (1915), 347–409]. In *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, pages 78–128. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.

[24] O. Ramaré and Y. Saouter. Short effective intervals containing primes. *J. Number Theory*, 98(1) :10–33, 2003.

[25] J. B. Rosser and L. Schoenfeld. Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois J. Math.*, 6 :64–94, 1962.

[26] L. Schoenfeld. Corrigendum : "Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II" (Math. Comput. **30** (1976), no. 134, 337–360). *Math. Comp.*, 30(136) :900, 1976.

[27] S. M. Shah. An inequality for the arithmetical function $g(x)$. *J. Indian Math. Soc.*, 3 :316–318, 1939.

[28] M. Szalay. On the maximal order in S_n and S_n^*. *Acta Arith.*, 37 :321–331, 1980.

Marc Deléglise, Jean-Louis Nicolas
Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS
Institut Camille Jordan, Mathématiques, Bât. Doyen Jean Braconnier
Université Claude Bernard (Lyon 1)
21 avenue Claude Bernard F-69622 Villeurbanne cédex, France.
e-mail : `deleglise@math.univ-lyon1.fr`, `jlnicola@in2p3.fr`
`http://math.univ-lyon1.fr/~deleglis/`
`http://math.univ-lyon1.fr/~nicolas/`